

Clasificación de Álgebras Toupie

Lic. Dalia Artenstein

Orientador: Dr. Marcelo Lanzilotta

24 de Junio de 2011

Tesis de maestría
Maestría en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay

Índice general

1. Preliminares	4
1.1. Teorema de Gabriel	4
1.2. Representaciones y módulos	7
2. Herramientas del Álgebra Homológica	10
2.1. Resoluciones proyectivas, inyectivas y planas	10
2.2. Ext^n y Tor^n	13
2.3. Dimensión global de una k -álgebra	17
3. Tipos de representación	24
3.1. Gabriel II	24
3.2. Resultado de Bongartz	27
3.3. Sobre la existencia de componente postproyectiva	34
4. Clasificación de las álgebras Toupie	37
4.1. Álgebras canónicas	37
4.1.1. Álgebras concealed	38
4.2. Álgebras Toupie	44
4.3. Cobertura universal	45
4.4. Álgebras Supercanónicas	47
4.5. Técnica de Inmersión	51
4.6. Álgebras asociadas a ciertas álgebras Toupie	55
4.6.1. Producto de mansas	56
4.6.2. $D = 0$	58
4.6.3. Un caso particular	58
4.7. Dependencia de A_0 y A_ω	60
4.8. Esquema	62
A. Álgebras Tubulares	66
B. Carcaj de Auslander-Reiten	71

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo está enmarcado dentro del área de la teoría de representaciones de álgebras, y dentro de ésta, en el uso de carcajes como herramienta para la comprensión de la categoría de los módulos asociados a un álgebra.

Más específicamente, el objetivo del trabajo será clasificar con respecto a su tipo de representación a un conjunto de álgebras llamadas Toupie. Dichas álgebras son de la forma kQ/I siendo kQ el álgebra de caminos de un carcaj Toupie e I un ideal admisible. Un carcaj Toupie es aquel que tiene única fuente, único pozo y dado un vértice que no es pozo ni fuente una única flecha llega a él y una única flecha sale de él. Cuando decimos clasificar según su tipo de representación nos referimos a agrupar a las álgebras Toupie en tres clases: las de tipo de representación finita, tipo de representación infinita mansa y tipo de representación infinita salvaje según la cantidad de representaciones indescomponibles no isomorfas que posean.

La importancia de clasificar las álgebras Toupie en la teoría de representaciones de álgebras radica en el hecho que el carcaj asociado a un álgebra triangular (Q , el carcaj asociado al álgebra triangular no posee ciclos orientados) se escribe como unión de carcajes Toupie. Estas álgebras ya han sido trabajadas en “Toupie algebra, some examples of laura algebras” [4] y en “Hochschild cohomology of a generalisation of canonical algebras” [5].

En el segundo capítulo se trabajará en aspectos relevantes del Álgebra Homológica involucrados en esta tesis, entre ellos el funtor extensión y la dimensión global de un álgebra. En particular, en la tercer sección de este capítulo, se verá el teorema de Auslander que demuestra que las dimensiones globales a derecha y a izquierda de un anillo de dimensión finita coinciden.

En el tercer capítulo repasaremos algunos resultados clásicos con respecto al tipo de representación de un álgebra. Entre ellos se destaca el teorema de Bongartz que relaciona la forma cuadrática de Tits de un álgebra con su tipo de representación.

El cuarto y último capítulo será dedicado a trabajar el problema de clasificación de las álgebras Toupie según su tipo de representación. Daremos la definición de álgebra Toupie y luego nos centraremos en su clasificación. Para esto utilizaremos distintos argumentos, algunos de ellos adaptando temas ya trabajados anteriormente por otros autores como las álgebras canónicas y supercanónicas y otros pensados especialmente para este problema, como la técnica de inmersión. El capítulo terminará con un teorema que clasificará completamente las álgebras Toupie.

Capítulo 1

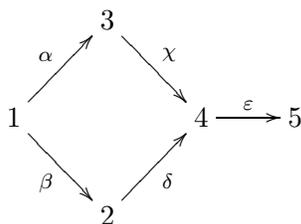
Preliminares

1.1. Teorema de Gabriel

Comencemos con algunas definiciones y conceptos básicos. Con ellos podremos enunciar uno de los resultados principales de la teoría, el teorema de Gabriel, que nos explica cuando un álgebra se puede escribir a partir de un carcaj y un ideal admisible. A lo largo de todo el trabajo consideraremos una k -álgebra con k algebraicamente cerrado.

DEFINICIÓN 1.1.1. Un **carcaj** es una cuádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, donde Q_0 es un conjunto cuyos elementos son llamados **puntos** o **vértices**, y Q_1 también es un conjunto en el cual sus elementos son llamados **flechas**. Además, s y t son dos mapas $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocian a cada $\alpha \in Q_1$ su fuente y su destino, respectivamente. Si $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$, escribimos $\alpha : i \rightarrow j$ para representar a la flecha α . Decimos que un carcaj Q es **finito** si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

EJEMPLO 1.1.2. Consideremos el siguiente carcaj:



$Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon\}$ $s(\alpha) = s(\beta) = 1$, $t(\alpha) = s(\chi) = 3$, $t(\beta) = s(\delta) = 2$, $t(\chi) = t(\delta) = s(\varepsilon) = 4$ y $t(\varepsilon) = 5$.

DEFINICIÓN 1.1.3. Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y $a, b \in Q_0$. Un **camino** de largo $\ell \geq 1$ con fuente a y destino b (de a en b) es una secuencia

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell|b),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$, para $1 \leq k \leq \ell$, que cumple que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_{k-1}) = s(\alpha_k)$, para cada $1 \leq k < \ell$ y $t(\alpha_\ell) = b$. Un camino de esta forma se escribe abreviadamente como $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_\ell$.

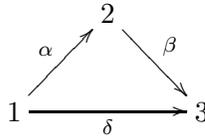
Además, asociamos a cada punto $a \in Q_0$ un camino de largo cero, que llamamos camino **trivial** o **estacionario** y que lo representamos como $\varepsilon_a = (a \parallel a)$. Un camino de largo $\ell \geq 1$ se llama **ciclo** si comienza y termina en el mismo punto. Un carcaj que no contiene ciclos se llama **acíclico**.

DEFINICIÓN 1.1.4. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** kQ es una k -álgebra que como espacio vectorial tiene de base los caminos en Q y el producto de dos vectores de la base se define de la siguiente manera:

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell|b)(c|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k|d)$$

Informalmente hablando, la operación es “pegar” los caminos si se puede, o sea, si el primer camino termina donde comienza el segundo.

EJEMPLO 1.1.5. Consideremos el siguiente carcaj:



El álgebra de caminos es como espacio vectorial $kQ = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \beta, \delta, \alpha\beta \rangle$. A modo de ejemplo plantearemos algunas de las multiplicaciones de los elementos de la base: $\alpha\varepsilon_1 = 0$, $\alpha\delta = 0$, $\beta\varepsilon_3 = \beta$.

DEFINICIÓN 1.1.6. Sea Q un carcaj finito y conexo. Llamaremos **ideal flecha** (R_Q) al ideal bilateral de kQ generado por las flechas de Q . Observemos que $R_Q = \bigoplus_{\ell \geq 1} kQ_\ell$ siendo kQ_ℓ el subespacio de kQ generado por los caminos de largo ℓ . A su vez, para cada $\ell \geq 1$, $R_Q^\ell = \bigoplus_{m \geq \ell} kQ_m$, es el ideal de kQ generado por los caminos de largo mayor o igual que ℓ (en efecto, alcanza con los caminos de largo exactamente ℓ para generar el ideal).

DEFINICIÓN 1.1.7. Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal flecha del álgebra de caminos kQ . Un ideal bilateral \mathcal{I} de kQ se dice **admisibles** si existe $m \geq 2$ tal que:

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Si \mathcal{I} es un ideal admisible de kQ , el par (Q, \mathcal{I}) se dice un **carcaj acotado**. Al álgebra cociente kQ/\mathcal{I} la llamaremos **álgebra del carcaj acotado** (Q, \mathcal{I}) .

DEFINICIÓN 1.1.8. Sea Q un carcaj. Una **relación** en Q con coeficientes en k es una combinación k -lineal de caminos de largo $l \geq 2$ que comienzan en un mismo vértice y terminan en un mismo vértice. Entonces, una relación ρ es un elemento de kQ que tiene la siguiente forma:

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

con $\lambda_i \in k$ no todos cero y w_i caminos de largo por lo menos 2 tal que $s(w_i) = s(w_j)$ y $t(w_i) = t(w_j)$, para $i, j = 1, \dots, m$.

LEMA 1.1.9. Sea Q un carcaj finito. Todo ideal admisible \mathcal{I} de kQ está finitamente generado.

Demostración: Sea R_Q el ideal flecha y $m \geq 2$ un entero tal que $R_Q^m \subset \mathcal{I}$. Tenemos la sucesión exacta corta de kQ -módulos:

$$0 \rightarrow R_Q^m \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/R_Q^m \rightarrow 0$$

Alcanza con probar que R_Q^m e \mathcal{I}/R_Q^m son finitamente generados para asegurar que \mathcal{I} lo es. Por definición R_Q^m está generado por los caminos de largo exactamente m y esto es una cantidad finita al tratarse de un carcaj finito. Por otro lado \mathcal{I}/R_Q^m es un ideal del álgebra kQ/R_Q^m que es de dimensión finita (una base son las clases de los caminos de largo menor o igual a m que es una cantidad finita). Por lo tanto \mathcal{I}/R_Q^m es un espacio vectorial de dimensión finita lo que implica que es finitamente generado como kQ -módulo. \square

COROLARIO 1.1.10. Si Q es un carcaj finito e \mathcal{I} un ideal admisible de kQ , existe una cantidad finita de relaciones $R = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$.

Demostración: Por el lema anterior sabemos que \mathcal{I} está finitamente generado.

Sea $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ un generador. Este generador finito no necesariamente está formado por relaciones pero se cumple que $\sigma_i = \sum_{a,b \in Q_0} \varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b$ para todo $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto el conjunto $\{\varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b : a, b \in Q_0 \ 1 \leq i \leq n\}$ forma un conjunto finito de relaciones que genera \mathcal{I} . \square

OBSERVACIÓN 1.1.11. Podemos tomar R de forma que ningún subconjunto propio de R genere \mathcal{I} . En tal caso \mathcal{I} es un conjunto de relaciones minimales.

DEFINICIÓN 1.1.12. Sea A una k -álgebra con un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. El álgebra A es **básica** si $e_i A \neq e_j A$, $\forall i \neq j$.

DEFINICIÓN 1.1.13. *Un álgebra A es **conexa** (o **indescomponible**) si no se puede escribir como producto directo de dos álgebras no nulas.*

TEOREMA 1.1.14. (Gabriel I) *Sea A una k -álgebra básica, conexa y de dimensión finita.*

Entonces existe un ideal admisible \mathcal{I} y un carcaj Q_A tal que $A \simeq kQ_A/\mathcal{I}$.

La demostración de este teorema se encuentra en [2].

1.2. Representaciones y módulos

Sea A un álgebra en las hipótesis del teorema de Gabriel, o sea el álgebra cociente obtenida a partir del álgebra de caminos de un carcaj Q y un ideal admisible \mathcal{I} , $A = kQ/\mathcal{I}$. Para este tipo de álgebras existe una equivalencia entre la categoría de módulos y la categoría de representaciones. El objetivo de esta sección será enunciar dicho resultado pero antes presentaremos algunas definiciones.

DEFINICIÓN 1.2.1. *Sea Q un carcaj. Una **representación k -lineal M de Q** (o simplemente una **representación de M en Q**) es definida de la siguiente manera:*

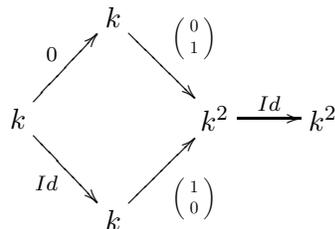
- (a) *A cada punto $a \in Q_0$ del carcaj le asocia un k -espacio vectorial M_a ,*
- (b) *A cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 le asocia un mapa k -lineal $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.*

Podemos escribir $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ con $a \in Q_0$ y $\alpha \in Q_1$.

Decimos que la representación M es de **dimensión finita** si cada M_a es un k -espacio vectorial de dimensión finita.

DEFINICIÓN 1.2.2. *Dada una representación de dimensión finita, $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y un orden en Q_0 llamamos **dimensión de la representación**, $\dim M$, al vector formado por las dimensiones de cada uno de los espacios vectoriales escritos en el orden convenido.*

EJEMPLO 1.2.3. *Para el carcaj visto al principio del capítulo en el ejemplo 1.1.2 veamos una representación posible M :*



Para la enumeración considerada en el ejemplo 1.1.2 $\dim M = (1, 1, 1, 2, 2)$.

DEFINICIÓN 1.2.4. Sean $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q . Un **morfismo** de representaciones $f : M \rightarrow M'$ es una familia $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de mapas k -lineales, donde $f_a : M_a \rightarrow M'_a$, para $a \in Q_0$, que cumple que para toda flecha $\alpha : a \rightarrow b$, $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$. O sea, para toda flecha $\alpha : a \rightarrow b$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ f_a \downarrow & & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

Las representaciones k -lineales de Q con los morfismos entre representaciones forman una categoría a la que llamaremos **Rep**(Q). A la subcategoría que se obtiene de considerar las representaciones de dimensión finita la denotaremos por **rep**(Q).

DEFINICIÓN 1.2.5. Sea Q un carcaj finito, y $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación de Q . Para un camino no trivial $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\ell$ de a hacia b en Q , definimos la **evaluación** de M en el camino w como el mapa k -lineal $\varphi_w : M_a \rightarrow M_b$ definido por:

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \varphi_{\alpha_{\ell-1}} \dots \varphi_{\alpha_1}.$$

DEFINICIÓN 1.2.6. Sea Q un carcaj finito, e \mathcal{I} un ideal admisible de kQ . Una representación $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q se dice **acotada por \mathcal{I}** si cumple que $\varphi_\rho = 0$ para toda $\rho \in \mathcal{I}$.

Denotamos por **Rep** $_k(Q, \mathcal{I})$ a la subcategoría de $\text{Rep}_k Q$ que contiene a las representaciones de Q acotadas por el ideal admisible \mathcal{I} . Análogamente, denotamos por **rep** $_k(Q, \mathcal{I})$ a la subcategoría de $\text{rep}_k Q$ que consiste de las representaciones de Q acotadas por el ideal admisible \mathcal{I} .

DEFINICIÓN 1.2.7. Sean dos representaciones $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$. La **suma directa** $M \oplus M'$ es una nueva representación definida como

$$M \oplus M' = \left(M_a \oplus M'_a, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right)$$

DEFINICIÓN 1.2.8. Una representación M de Q se dice **indescomponible** si no es isomorfa a la suma directa de dos representaciones no nulas.

OBSERVACIÓN 1.2.9. Recordemos que los A -módulos a derecha con los homomorfismos de A -módulos a derecha forman una categoría llamada $\text{Mod}A$. Dentro de ésta podemos considerar a los A -módulos a derecha finitamente generados. Éstos, con los homomorfismos correspondientes forman una subcategoría a la que llamaremos $\text{mod}A$.

TEOREMA 1.2.10. *Sea $A = kQ/\mathcal{I}$ donde Q es un carcaj finito y conexo e \mathcal{I} es un ideal admisible de kQ . Existe una equivalencia k -lineal de categorías:*

$$F: \text{Mod}A \xrightarrow{\cong} \mathbf{Rep}_k(Q, \mathcal{I})$$

que se restringe a una equivalencia de categorías:

$$F: \text{mod}A \xrightarrow{\cong} \mathbf{rep}_k(Q, \mathcal{I}).$$

Capítulo 2

Herramientas del Álgebra Homológica

Algunos conceptos básicos del álgebra homológica aparecerán a lo largo del trabajo. A continuación definiremos varios de ellos. En este capítulo trabajaremos con A una k -álgebra de dimensión finita aunque muchos de los resultados aquí citados se cumplen en un contexto más general.

2.1. Resoluciones proyectivas, inyectivas y planas

PROPOSICIÓN 2.1.1. *Sea M un A -módulo a derecha arbitrario. Entonces, existe una sucesión exacta*

$$\dots \rightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \rightarrow 0$$

en $\text{Mod}A$, donde P_j es un A -módulo a derecha proyectivo para todo $j \geq 0$. Si además, M está en $\text{mod}A$, cada P_j puede elegirse en $\text{mod}A$.

Demostración: Recordemos que los módulos libres son proyectivos, construiremos entonces una resolución libre que en particular será proyectiva.

Consideramos un conjunto generador de M que llamaremos R . Ahora tomemos el módulo libre P_0 que tiene tantas copias de A como elementos en R . Claramente existe un mapa sobreyectivo $h_0 : P_0 \rightarrow M$.

Luego tomamos la inclusión i del núcleo de h_0 en P_0 . Con dicho núcleo hacemos el mismo procedimiento que con M , tomamos un generador de $\text{Ker}(h_0)$ llamado R_1 y consideramos el módulo libre P_1 con tantas copias de A como elementos en R_1 , con $p : P_1 \rightarrow \text{Ker}(h_0)$ sobreyectiva. El mapa $h_1 : P_1 \rightarrow P_0$ será $i \circ p$. Ahora tomamos $\text{Ker}(h_1)$ y repetimos el procedimiento. Con este procedimiento obtenemos una resolución libre que en particular es proyectiva. Claramente si partimos de un M en $\text{mod}A$, los P_i estarán en $\text{mod}A$. \square

Una resolución como la anterior se llama **resolución proyectiva** del A -módulo M . Algunas veces consideraremos un tipo de resolución proyectiva especial a la que llamaremos **minimal**. Veamos de que se trata.

Un epimorfismo $h : M \rightarrow N$ en $\text{mod } A$ es **minimal** si $\text{Ker } h$ es superfluo en M (para todo submódulo X de M que cumple $\text{Ker } h + X = M$, entonces $X = M$). Un epimorfismo $h : P \rightarrow M$ en $\text{mod } A$ se llama **cobertura proyectiva** de M si P es un módulo proyectivo y h es un epimorfismo minimal.

Una resolución proyectiva en $\text{mod } A$ se denomina **resolución proyectiva minimal** de M , si $h_j : P_j \rightarrow \text{Ker } h_{j-1}$ es una cobertura proyectiva para todo $j \geq 1$ y $P_0 \xrightarrow{h_0} M$ es una cobertura proyectiva. Se prueba que, dada A una k -álgebra, cualquier módulo en $\text{mod } A$ admite una resolución proyectiva minimal en $\text{mod } A$.

DEFINICIÓN 2.1.2. Decimos que un A -módulo a izquierda B es plano si el funtor $-\otimes B$ es exacto. En otras palabras si dada una sucesión exacta corta de A -módulos a derecha:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \rightarrow 0$$

la siguiente es una sucesión exacta corta de grupos abelianos:

$$0 \rightarrow M \otimes B \xrightarrow{f \otimes id} C \otimes B \xrightarrow{g \otimes id} D \otimes B \rightarrow 0$$

La definición de A -módulo plano a derecha es similar.

DEFINICIÓN 2.1.3. Una **resolución plana** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\dots \rightarrow B_m \xrightarrow{q_m} B_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_1 \xrightarrow{q_1} B_0 \xrightarrow{q_0} M \rightarrow 0$$

en $\text{Mod } A$, donde B_j es un A -módulo a derecha plano para todo $j \geq 0$.

OBSERVACIÓN 2.1.4. La existencia de las resoluciones planas sale del hecho que los proyectivos son módulos planos.

OBSERVACIÓN 2.1.5. Dado M un A -módulo a derecha, $D(M) = \text{Hom}_k(M, k)$ tiene estructura de $\text{mod}(A^{op})$ que es equivalente a decir que es un A -módulo a izquierda.

TEOREMA 2.1.6. Sea A una k -álgebra de dimensión finita y $D : \text{mod } A \rightarrow \text{mod}(A^{op})$ la dualidad estándar $D(-) = \text{Hom}_k(-, k)$. Entonces se verifica lo siguiente.

(a) Una sucesión

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} N \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$$

en $\text{mod}A$ es exacta, si y solamente si la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow D(M) \xrightarrow{D(h)} D(N) \xrightarrow{D(u)} D(L) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\text{mod}A^{\text{op}}$.

(b) Un módulo E en $\text{mod}A$ es inyectivo si y solamente si el módulo $D(E)$ es proyectivo en $\text{mod}A^{\text{op}}$. Un módulo P en $\text{mod}A$ es proyectivo, si y solamente si el módulo $D(P)$ es inyectivo en $\text{mod}A^{\text{op}}$.

Demostración: Para la parte (a) debemos usar las siguientes igualdades que se obtienen al dualizar un morfismo v en $\text{mod}A$:

$$D(\text{Ker}(v)) = \text{Coker}(D(v)) \text{ y } D(\text{Im}(v)) = \text{Dom}(D(v))/\text{Ker}(D(v)).$$

Para la parte (b) debemos observar que al dualizar el esquema de la definición de proyectivo para P pasa a ser el esquema de la definición de inyectivo para $D(P)$. \square

COROLARIO 2.1.7. Sea M un A -módulo a derecha arbitrario. Entonces, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{h^0} E^0 \xrightarrow{h^1} E^1 \dots \rightarrow E^n \xrightarrow{h^{n+1}} E^{n+1} \rightarrow \dots$$

en $\text{Mod}A$, donde E^j es un A -módulo a derecha inyectivo para todo $j \geq 0$.

Demostración: Considerar la resolución proyectiva de $D(M)$ y luego dualizar ($DDM = M$) para obtener la sucesión buscada. \square

A una sucesión exacta como la anterior se le llama **resolución inyectiva**.

Un monomorfismo de A -módulos $u : L \rightarrow M$ en $\text{mod}A$ es **minimal** si todo submódulo no nulo X de M tiene intersección no vacía con $\text{Im } u$.

Un monomorfismo $u : L \rightarrow E$ en $\text{mod}A$ se denomina **envolvente inyectiva** de L si E es un módulo inyectivo y u es un monomorfismo minimal.

Una resolución inyectiva $0 \rightarrow M \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^m \xrightarrow{d^{m+1}} I^{m+1} \rightarrow \dots$ de un módulo M en $\text{mod}A$ se dice **minimal** si $\text{Im}(d^m) \rightarrow I^m$ es una envolvente inyectiva para todo $m \geq 1$, y $d^0 : M \rightarrow I^0$ es una envolvente inyectiva. Se prueba que todo módulo M en $\text{mod}A$ tiene una resolución inyectiva minimal en $\text{mod}A$.

DEFINICIÓN 2.1.8. Dado un módulo M y una resolución proyectiva:

$$P_* : \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

definimos $K_n = \text{Ker}d_n, \forall n \geq 0$. Llamamos a K_n la n -ésima sicigia de P_* .

Para una resolución plana se define la n -ésima sicigia en forma análoga partiendo de una resolución plana.

Dado un módulo M y una resolución inyectiva:

$$E_* : 0 \rightarrow M \xrightarrow{d^0} E^0 \xrightarrow{d^1} E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \xrightarrow{d^{n+1}} E^{n+1} \rightarrow \dots$$

definimos $V^n = \text{Coker}d^{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Llamamos a V^n la n -ésima cosicigia de E_* .

2.2. Ext^n y Tor^n

DEFINICIÓN 2.2.1. Un **complejo de cadena** en la categoría $\text{Mod}A$ es una sucesión :

$$C_\bullet : \dots \rightarrow C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

de A -módulos a derecha conectados por A -homomorfismos tal que $d_n d_{n+1} = 0 \forall n \geq 0$.

Un **complejo de cocadena** en la categoría $\text{Mod}A$ es una sucesión

$$C^\bullet : 0 \xrightarrow{d^0} C^0 \xrightarrow{d^1} C^1 \xrightarrow{d^2} \dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \rightarrow \dots$$

de A -módulos a derecha conectados por A -homomorfismos tal que $d^{n+1}d^n = 0 \forall n \geq 0$.

DEFINICIÓN 2.2.2. Consideremos (C_\bullet, d_\bullet) y (C'_\bullet, d'_\bullet) complejos, un **mapa de cadena** $f = f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ es una sucesión de morfismos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \rightarrow & \dots \\ & & f_{n+1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Es sencillo chequear que la composición gf de dos mapas de cadena: $f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ y $g_\bullet : (C'_\bullet, d'_\bullet) \rightarrow (C''_\bullet, d''_\bullet)$ es un mapa de cadena, donde $(gf)_n = g_n f_n$. El mapa de cadena identidad 1_{C_\bullet} en (C_\bullet, d_\bullet) es la sucesión de morfismos identidad $1_{C_n} : C_n \rightarrow C_n$.

OBSERVACIÓN 2.2.3. De forma análoga podemos definir los mapas de cocadena.

Nuestro próximo objetivo será construir los n -ésimos módulos de homología y cohomología.

DEFINICIÓN 2.2.4. Para todo $n \geq 0$, el n -ésimo módulo de homología del complejo de cadena C_\bullet y el n -ésimo módulo de cohomología del complejo de cocadena C^\bullet son los módulos cociente:

$H_n(C_\bullet) = \text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1})$ y $H^n(C^\bullet) = \text{Ker}(d^{n+1})/\text{Im}(d^n)$ respectivamente.

DEFINICIÓN 2.2.5. Definiremos ahora $H_n(f)$ con f un mapa entre complejos. Dado $f = f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ definimos $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ como $H_n(f)(\bar{z}_n) = \overline{f_n z_n}$.

PROPOSICIÓN 2.2.6. Consideremos \mathcal{A} la categoría de módulos de una k -álgebra en las hipótesis de este capítulo. Si:

$$0 \rightarrow C'_\bullet \xrightarrow{i} C_\bullet \xrightarrow{p} C''_\bullet \rightarrow 0$$

con i y p mapas de cadena es una sucesión exacta de complejos de cadena (o sea, $0 \rightarrow C'_m \xrightarrow{i_m} C_m \xrightarrow{p_m} C''_m \rightarrow 0$ es exacta, $\forall m \in \mathbb{Z}$), entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe un morfismo en \mathcal{A} :

$$\partial_n : H_n(C''_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(C'_\bullet)$$

definido como $\partial_n : \bar{z}''_n \mapsto \overline{i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1} z''_n}$ (este resultado se encuentra en el capítulo 6 de [13]).

TEOREMA 2.2.7. (Secuencia exacta larga de homología). Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de complejos de cadena:

$$0 \rightarrow C'_\bullet \xrightarrow{i} C_\bullet \xrightarrow{p} C''_\bullet \rightarrow 0$$

entonces existe una sucesión exacta larga en \mathcal{A} :

$$\rightarrow H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C'_\bullet) \rightarrow \dots$$

(este resultado se encuentra en el capítulo 6 de [13])

OBSERVACIÓN 2.2.8. En forma análoga se define la sucesión exacta larga de cohomología.

LEMA 2.2.9. Sea A una k -álgebra de dimensión finita. Sea $D = \text{Hom}(-, k) : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}(A^{\text{op}})$ la dualidad estándar para álgebras de Artin y sea:

$$C^\bullet : 0 \xrightarrow{d^0} C^0 \xrightarrow{d^1} C^1 \xrightarrow{d^2} \dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^n} C^n \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+2}} C^{n+2} \rightarrow \dots$$

un complejo de cocadena. Entonces DC^\bullet es un complejo de cadena en $\text{mod}A^{\text{op}}$ y existe un isomorfismo funtorial $H_n(DC^\bullet) \cong DH^n(C^\bullet) \forall n \geq 0$.

Demostración: Para cada $n \geq 0$ existe la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \text{Im}d^n \rightarrow \text{Ker}d^{n+1} \rightarrow H^n(C^\bullet) \rightarrow 0$$

Aplicando la dualidad obtenemos la sucesión:

$$0 \rightarrow DH^n(C^\bullet) \rightarrow D(\text{Ker}d^{n+1}) \rightarrow D(\text{Im}d^n) \rightarrow 0$$

de A -módulos a izquierda.

Por otro lado: $D(\text{Ker}d^{n+1}) \cong \text{Coker}(Dd^{n+1}) = DC^n/\text{Im}(Dd^{n+1})$ y $D(\text{Im}d^n) \cong DC^n/\text{Ker}Dd^n$. Por lo tanto la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow DH^n(C^\bullet) \rightarrow DC^n/(\text{Im}(Dd^{n+1})) \rightarrow DC^n/(\text{Ker}(Dd^n)) \rightarrow 0$$

induce el isomorfismo: $DH^n(C^\bullet) \cong (\text{Ker}(Dd^n)/(\text{Im}(Dd^{n+1})))$ que es funtorial. \square

DEFINICIÓN 2.2.10. Sea A una k -álgebra. Para cada $m \geq 0$ el m -ésimo bifunctor de extensión:

$$\text{Ext}_A^m : \text{Mod}A \times \text{Mod}A \rightarrow \text{Mod}k$$

se define de la siguiente forma. Dados dos módulos M y N en $\text{Mod}A$ tomamos la resolución proyectiva P_\bullet de M :

$$P_\bullet : \cdots \rightarrow P_m \xrightarrow{h_m} \cdots \xrightarrow{h_2} P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h} M \rightarrow 0$$

Aplicando el funtor $\text{Hom}_A(-, N)$ obtenemos el siguiente complejo de cocadena:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(P_\bullet, N) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(h_1, N)} \text{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(h_2, N)} \\ \cdots \longrightarrow \text{Hom}_A(P_m, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(h_{m+1}, N)} \text{Hom}_A(P_{m+1}, N) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

de k -espacios vectoriales.

Definimos $\text{Ext}_A^m(M, N)$ como el m -ésimo k -espacio vectorial de cohomología $H^m(\text{Hom}_A(P_\bullet, N))$, o sea:

$$\text{Ext}_A^m(M, N) = H^m(\text{Hom}_A(P_\bullet, N)) := \text{Ker}(\text{Hom}_A(h_{m+1}, N)) / \text{Im}(\text{Hom}_A(h_m, N))$$

donde $h_0 = 0$.

OBSERVACIÓN 2.2.11. Formalmente para que Ext_A^m sea efectivamente un bifunctor deberíamos definirlo en $(\text{Mod}A)^{\text{op}} \times \text{Mod}A$ para que sea covariante en ambas coordenadas.

OBSERVACIÓN 2.2.12. También podemos construir el m -ésimo bifunctor de extensión partiendo de una resolución inyectiva de N .

PROPOSICIÓN 2.2.13. *Consideremos la siguiente resolución proyectiva de M , un A -módulo a derecha, en $\text{Mod}A$.*

$$P_{\bullet} = \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{h} M \rightarrow 0.$$

Sea $Y_0 = \ker h$ e $Y_n = \text{Ker}d_n \forall n \geq 1$. Entonces,

$$\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) \simeq \text{Ext}_A^n(Y_0, N) \simeq \cdots \simeq \text{Ext}_A^1(Y_{n-1}, N).$$

Demostración: Al ser P_{\bullet} una resolución proyectiva de M tenemos que:

$$P'_{\bullet} = \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} Y_0 \rightarrow 0.$$

es una resolución proyectiva de Y_0 . Cambiemos la notación para que los índices sean los adecuados y llamemos $Q_n = P_{n+1}$ y $d'_n = d_{n+1} \forall n \geq 0$. Entonces, $\text{Ext}_A^n(Y_0, N) = \text{Ker}(\text{Hom}_A(d'_{n+1}, N)) / \text{Im}(\text{Hom}_A(d'_n, N)) = \text{Ker}(\text{Hom}_A(d_{n+2}, N)) / \text{Im}(\text{Hom}_A(d_{n+1}, N)) = \text{Ext}_A^{n+1}(M, N)$. De forma similar construimos el resto de los isomorfismos. \square

OBSERVACIÓN 2.2.14. *Dada una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

podemos considerar resoluciones proyectivas de M, N y P de forma que quede una sucesión exacta corta de complejos. Al quitar los mismos M, N y P y aplicar el funtor $\text{Hom}_A(-, B)$ obtenemos una nueva sucesión exacta corta de complejos a partir de la cual se obtiene la siguiente sucesión exacta larga de homología: $0 \rightarrow \text{Hom}_A(P, B) \rightarrow \text{Hom}_A(N, B) \rightarrow \text{Hom}_A(M, B) \rightarrow \text{Ext}_A^1(P, B) \rightarrow \text{Ext}_A^1(N, B) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, B) \rightarrow \text{Ext}_A^2(P, B) \cdots$.

Pasemos ahora a definir el bifunctor de torsión.

DEFINICIÓN 2.2.15. *Para cada $m \geq 0$, definimos el m -ésimo bifunctor de torsión:*

$$\text{Tor}_m^A : \text{Mod}A \times \text{Mod}A^{op} \rightarrow \text{Mod}k$$

de la siguiente forma. Dado un A -módulo a derecha M y un A -módulo a izquierda N , tomamos una resolución proyectiva de M , P_{\bullet} y llamamos $P_{\bullet} \otimes_A N$ al siguiente complejo de cadena:

$$P_{\bullet} \otimes_A N : \cdots \rightarrow P_m \otimes_A N \xrightarrow{h_m \otimes 1} P_{m-1} \otimes_A N \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \otimes_A N \xrightarrow{h_1 \otimes 1} P_0 \otimes_A N \rightarrow 0.$$

Definimos $Tor_m^A(M, N)$ como el m -ésimo k -espacio vectorial de homología $H_m(P_\bullet \otimes_A N)$ del complejo de cadena $P_\bullet \otimes_A N$; o sea,

$$Tor_m^A(M, N) = H_m(P_\bullet \otimes_A N) = Ker(h_m \otimes 1) / Im(h_{m+1} \otimes 1).$$

OBSERVACIÓN 2.2.16. Podemos construir de forma análoga el m -ésimo bifunctor de torsión a partir de una resolución plana de M . También podemos partir de una resolución proyectiva del módulo a izquierda N para calcular $Tor_m^A(M, N)$.

PROPOSICIÓN 2.2.17. Si un A -módulo a derecha F es plano, entonces, para todo n $Tor_n^A(F, M) = \{0\}$ para todo A -módulo a izquierda M . Además, si $Tor_1^A(F, M) = \{0\}$ para todo A -módulo a izquierda M , entonces F es plano.

Demostración: Sea P_\bullet una resolución proyectiva de M . Como F es plano el funtor $F \otimes_A -$ es exacto y por lo tanto el complejo: $F \otimes_A P_\bullet \cdots \rightarrow F \otimes_A P_n \rightarrow F \otimes_A P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F \otimes_A P_1 \rightarrow F \otimes_A P_0 \rightarrow 0$ es exacto lo que implica que $Tor_n^A(F, M) = \{0\}$.

Para el recíproco, tomo una sucesión exacta corta en A mod:

$$0 \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

y considero la sucesión exacta larga de cohomología obteniendo

$$\cdots \rightarrow Tor_1^A(F, C) = 0 \rightarrow F \otimes_A D \rightarrow F \otimes_A B \rightarrow F \otimes_A C \rightarrow 0$$

lo que implica que F es plano. \square

PROPOSICIÓN 2.2.18. Consideremos la siguiente resolución proyectiva de M , un A -módulo a derecha.

$$P_\bullet = \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{h} M \rightarrow 0.$$

Sea $Y_0 = Ker h$ e $Y_n = Ker h_n \forall n \geq 1$. Entonces,

$$Tor_{n+1}^A(M, N) \simeq Tor_n^A(Y_0, N) \simeq \cdots \simeq Tor_1^A(Y_{n-1}, N).$$

La demostración de esta proposición es análoga a 2.2

2.3. Dimensión global de una k -álgebra

DEFINICIÓN 2.3.1. Sea A una k -álgebra. La **dimensión proyectiva** de un A -módulo a derecha (a izquierda) M es el entero no negativo $pd_A M = \mathbf{m}$ tal que existe una resolución proyectiva:

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow P_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \rightarrow 0$$

de M de largo \mathbf{m} y no existe una resolución proyectiva de M de largo $\mathbf{m} - 1$. Si M no admite resoluciones proyectivas de largo finito decimos que $pd_A M = \infty$.

DEFINICIÓN 2.3.2. Sea A una k -álgebra. La **dimensión plana** de un A -módulo a derecha (a izquierda) M es el entero no negativo $fd_A M = m$ tal que existe una resolución plana:

$$0 \rightarrow F_m \rightarrow F_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{h_1} F_0 \xrightarrow{h_0} M \rightarrow 0$$

de M de largo \mathbf{m} y M no existe una resolución plana de largo $\mathbf{m} - 1$. Si M no admite resoluciones planas de largo finito decimos que $fd_A M = \infty$.

DEFINICIÓN 2.3.3. La **dimensión global a derecha e izquierda** de una k -álgebra A son los siguientes números:

$$r.gl.dim A = \max\{pd M; M \text{ es un mod } A \text{ a derecha}\}$$

$$l.gl.dim A = \max\{pd L; L \text{ es un } A \text{ mod a izquierda}\}$$

si estos números existen. Sino decimos que son infinitas.

PROPOSICIÓN 2.3.4. Consideremos M un A -módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) $pd_A M \leq n$.
- (ii) $Ext_A^k(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a derecha B con $k \geq n + 1$.
- (iii) $Ext_A^{n+1}(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a derecha B .
- (iv) Existe una resolución proyectiva de M cuya $n - 1$ sicigia es proyectiva.
- (v) Toda resolución proyectiva de M tiene su $n - 1$ sicigia proyectiva.

Demostración: (i) \rightarrow (ii) Para esto basta tomar una resolución proyectiva de M de largo n o menor (que sabemos que existe al ser $pd_A M \leq n$) y aplicar la definición de Ext.

(ii) \rightarrow (iii) trivial.

(iii) \rightarrow (iv) Sabemos que $Ext_A^{n+1}(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a derecha B y también tenemos que $Ext_A^{n+1}(M, B) = Ext_A^1(Y_{n-1}, B)$ siendo Y_{n-1} la $n - 1$ sicigia; por lo tanto Y_{n-1} es necesariamente proyectivo.

(iv) \rightarrow (v) Sabemos que Y_{n-1} es proyectivo y tomamos Y'_{n-1} la $n - 1$ sicigia de otra resolución proyectiva. Se cumple por el lema de Schanuel que existen proyectivos P y P' tales que $P \oplus Y'_{n-1} \simeq P' \oplus Y_{n-1}$. Esto implica que Y'_{n-1} es sumando de proyectivo y por lo tanto proyectivo.

(v) \rightarrow (i) Dada una resolución proyectiva :

$$\cdots \rightarrow P_k \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

consideramos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

(siendo Y_{n-1} su $n - 1$ sicigia) que también será una resolución proyectiva al ser Y_{n-1} proyectivo. \square

Nuestro próximo objetivo será probar que $r.gl.dim A = l.gl.dim A$ considerando una k -álgebra de dimensión finita. La prueba que aquí daremos es, de hecho, válida para cualquier anillo noetheriano.

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Si:*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A -módulos a derecha con M proyectivo y M'' no proyectivo, entonces $pd_A M'' = 1 + pd_A M'$.

Demostración: A partir de la sucesión exacta corta, si tomamos la sucesión exacta larga de homología, siendo M'' no proyectivo obtenemos el siguiente isomorfismo: $Ext_A^k(M', C) \simeq Ext_A^{k+1}(M'', C)$ para todo $k \geq 1$ ya que tanto $Ext^k(M, C)$ como $Ext^{k+1}(M, C)$ son cero al ser M proyectivo. De este isomorfismo sale que $pd_A M'' = 1 + pd_A M'$. \square

PROPOSICIÓN 2.3.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $fdM \leq n$
- (ii) $Tor_A^k(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a izquierda B y para todo $k \geq n + 1$.
- (iii) $Tor_A^{n+1}(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a izquierda B .
- (iv) Toda resolución plana de M tiene su $n - 1$ sicigia ($kerd_{n-1}$) plana.

Demostración: (i) \rightarrow (ii) Consideremos la resolución plana de M y apliquemos la definición de Tor (por la observación 2.2.16 podemos definir Tor partiendo de una resolución plana). Claramente $Tor_A^k(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a izquierda B y $\forall k \geq n + 1$.

(ii) \rightarrow (iii) Trivial.

(iii) \rightarrow (iv) Sabemos que $Tor_{n+1}^A(M, B) = \{0\}$ para todo A -módulo a izquierda B y también tenemos que $Tor_{n+1}^A(M, B) = Tor_1^A(Y_{n-1}, B)$ siendo Y_{n-1} la $n - 1$ sicigia; por lo tanto Y_{n-1} es necesariamente plano.

(iv) \rightarrow (i) Dada una resolución plana :

$$\cdots \rightarrow F_k \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

consideramos la siguiente sucesión exacta: $0 \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ que también será una resolución plana al ser Y_{n-1} plano, por lo tanto, $fdM \leq n$. \square

PROPOSICIÓN 2.3.7. *Sea M un A -módulo a derecha, I un conjunto no vacío bien ordenado y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de M tal que si $i, j \in I$ e $i \leq j$, entonces $M_i \subseteq M_j$. Si $\bigcup_{i \in I} M_i = M$ y $pd_A(M_i/M'_i) \leq n \forall i \in I$ donde $M'_i = \bigcup_{j < i} M_j$. Entonces $pd_A M \leq n$.*

Demostración: La prueba será por inducción en n . Para $n = 0$ tenemos que $\forall i \in I \text{ } pd_A(M_i/M'_i) \leq 0$. Por lo tanto cada M_i/M'_i es proyectivo. Esto implica que cada una de estas sucesiones exactas cortas se escinden:

$$0 \rightarrow M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M_i/M'_i \rightarrow 0$$

Por lo tanto existe un submódulo C_i para cada i tal que:

- (i) $M_i = M'_i \oplus C_i$
- (ii) $C_i \cong M_i/M'_i$ y por lo tanto también es proyectivo.

Por (i) y la hipótesis que $\bigcup_{i \in I} M_i = M$ deducimos que $M = \bigoplus_{i \in I} C_i$.

Esto lo podemos probar de la siguiente manera:

Al ser I un conjunto bien ordenado consideremos i_0 el elemento mínimo. Tenemos que $M_{i_0} = M'_{i_0} \oplus C_{i_0}$ pero al ser i_0 el mínimo $M'_{i_0} = 0$. Consideremos ahora i_1 el mínimo de $I - \{i_0\}$, $M_{i_1} = M'_{i_1} \oplus C_{i_1} = C_{i_0} \oplus C_{i_1}$. Repitiendo este procedimiento obtenemos que $M_{i_j} = C_{i_0} \oplus C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_j}$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$ entonces $x \in M_k$ para algún k y por lo tanto $x \in \bigoplus_{i \in I} C_i$. Como $\bigoplus_{i \in I} C_i \subset M$ concluimos que $\bigoplus_{i \in I} C_i = M$.

Por (ii) tenemos que M es proyectivo lo que implica que $pd_A(M) = 0$ y así se prueba el caso $n = 0$. Tomemos ahora un $n > 0$ y sabiendo que el resultado se cumple para $n - 1$ probemoslo para n . Tenemos que $pd_A M_i/M'_i \leq n \forall i \in I$. Sea F el módulo libre generado por los elementos de M y F_i el A -módulo libre generado por los elementos de M_i (F'_i el A -módulo libre generado por los elementos de M'_i). Sea $R = Ker(F \rightarrow M)$, $R_i = F_i \cap R$ y $R'_i = F'_i \cap R$. Como $M'_i \subset M_i$, $F'_i \subset F_i$, $R'_i \subset R_i$ y tenemos que las

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & F & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{sucesiones exactas horizontales son: } & 0 & \rightarrow & R_i & \rightarrow & F_i & \rightarrow & M_i & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & 0 & \rightarrow & R'_i & \rightarrow & F'_i & \rightarrow & M'_i & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Obtenemos que la siguiente sucesión es exacta para todo $i \in I$:

$$0 \rightarrow R_i/R'_i \rightarrow F_i/F'_i \rightarrow M_i/M'_i \rightarrow 0$$

Cada F_i/F'_i es libre ya que cada F'_i es generado por una parte de la base de F_i y en particular esto implica que es proyectivo.

Por la proposición anterior (2.3.5) tenemos que $pd_A R_i/R'_i \leq n - 1$. Se puede ver fácilmente que los R_i están en las hipótesis de esta proposición para $n-1$ (si $i \leq j$ $R_i \subseteq R_j$, $R = \bigcup_{i \in I} R_i$, $R'_i = \bigcup_{j < i} R_j$). Por lo tanto tenemos que $pd_A R \leq n - 1$. Como la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$$

sale de la proposición anterior (2.3.5) que $pd_A M = 1 + pd_A(R) \leq n$. \square

TEOREMA 2.3.8. *Para cada anillo A tenemos que:*

$$(a) \ r.gl.dim A = \sup_B pd_A B$$

$$(b) \ r.gl.dim A = \sup_I pd_A A/I$$

donde B recorre los A -módulos a derecha generados por un solo elemento e I los ideales a derecha de A .

Demostración: (a) si y solo si (b) es claro ya que dado un A -módulo a derecha $B = \langle x \rangle$ en estas condiciones es isomorfo a A/I siendo $I = \{a \in A : a.x = 0\}$ y dado A/I con I un ideal a derecha sabemos que $A/I = \langle \bar{1} \rangle$. Probemos entonces (a). Consideremos M un A -módulo arbitrario. Como todo conjunto admite una buena ordenación ordenamos los elementos x_i de M y consideramos M_i el módulo generado por $\{x_j\}_{j \leq i}$ (M'_i será el generado por $\{x_j\}_{j < i}$).

Entonces M_i/M'_i es 0 o está generado por x_i . Por lo tanto $pd_A M_i/M'_i \leq n$ donde $n = \sup_B pd_B$ y B varía en la familia de módulos generados por un elemento (si $\sup_B pd_B = \infty$ $r.gl.dim A = \infty$ y el resultado ya está demostrado). Como la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ está en las hipótesis de la proposición anterior tenemos que $pd_A M \leq n$. Como M es un A -módulo arbitrario tenemos que $r.gl.dim A \leq n$. Sin embargo, tenemos por definición que $l.gl.dim A \geq n$ ya que tomamos todos los A -módulos y no solo los generados por un elemento. En conclusión, $r.gl.dim A = n$. \square

DEFINICIÓN 2.3.9. *Sea M un A -módulo a derecha. La dimensión débil a derecha de M es:*

$$-1 \leq w.r.dim M \leq \infty$$

donde $w.r.dim_A M < n$ si y solo si $Tor_n^A(M, C) = 0$ para todo A -módulo a izquierda C . Para un A -módulo a izquierda N la definición de $w.l.dim N$ es similar.

PROPOSICIÓN 2.3.10. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) $pd_A M \geq w.r.dim_A M$

(ii) *Si A es un anillo noetheriano a derecha tenemos además que*

$$pd_A M = w.r.dim_A M$$

para M finitamente generado.

Demostración: La parte (i) sale directo de la definición, si tenemos una resolución proyectiva de largo n de M , entonces $Tor_A^k(M, C) = 0$ para $k > n$ y por lo tanto $w.r.dim_A M \leq n$. Para la parte (ii) consideremos que $w.r.dim_A M = n$ y tomemos una resolución proyectiva de M con cada P_i finitamente generado (esto es posible al ser M finitamente generado)

$$\cdots P_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} P_k \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0.$$

Como también es una resolución plana y $w.r.dim_A M = n$ tenemos que $Y_{n-1} = \ker d_{n-1}$ es plano por lo tanto construimos la siguiente resolución plana:

$$0 \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

que también será proyectiva al ser el anillo noetheriano a derecha e Y_{n-1} un módulo plano finitamente generado (este resultado se puede ver en el capítulo 3 de [13]). Por lo tanto $pd_A M \leq n$ y por (i)

$$pd_A M = w.r.dim_A M \square$$

DEFINICIÓN 2.3.11. *La dimensión débil de un anillo A es:*

$$0 \leq w.gl.dim A \leq \infty$$

donde $w.gl.dim A < n$ si y solo si $Tor_n^A = 0$.

OBSERVACIÓN 2.3.12. *Para la dimensión débil no hay distinción entre derecha e izquierda, es más, tenemos que:*

$$w.gl.dim A = \sup_M w.l.dim_A M = \sup_N w.r.dim_A N$$

donde M recorre los A -módulos a izquierda y N los A -módulos a derecha.

TEOREMA 2.3.13. *Si el anillo A es noetheriano a derecha entonces:*

$$r.gl.dim A = w.gl.dim A$$

En forma similar, si A es noetheriano a izquierda entonces:

$$l.gl.dim A = w.gl.dim A$$

Demostración: Por el Teorema 2.3.8 podemos deducir que:

$$r.gl.dim A = \sup_{M} pd_{A}M$$

con M recorriendo los A -módulos a izquierda finitamente generados. Como A es noetheriano a derecha tenemos por la proposición anterior (2.3.10) que

$$pd_{A}M = w.r.dim_{A}M$$

para los módulos finitamente generados. En conclusión

$$r.gl.dim A = w.gl.dim A$$

La otra prueba es análoga. \square

COROLARIO 2.3.14. *Si A es una k -álgebra finito dimensional, entonces $r.g.dim A = l.g.dim A$ y a ese número le llamaremos **dimensión global**.*

Demostración: Recordemos que una k -álgebra finito dimensional es noetheriana a derecha y a izquierda. \square

Capítulo 3

Tipos de representación

3.1. Gabriel II

El siguiente resultado clasificará las álgebras hereditarias según su tipo de representación.

DEFINICIÓN 3.1.1. *Decimos que un álgebra $A = kQ_A/\mathcal{I}$ es de **tipo de representación finita** si tiene una cantidad finita de representaciones indescomponibles no isomorfas. En caso contrario decimos que A es de **tipo de representación infinita**.*

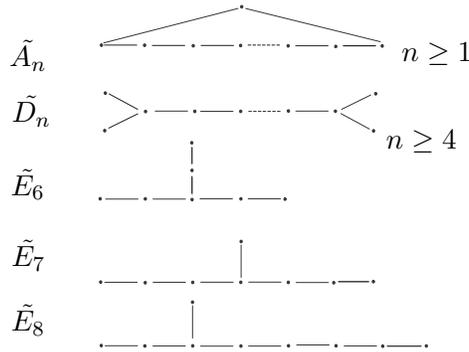
DEFINICIÓN 3.1.2. *Dada un álgebra de **tipo de representación infinita** decimos que es **mansa** si para cada dimensión $\mathbf{d} \in \mathbb{N}$ (la dimensión del módulo como espacio vectorial) existe un número finito de familias uniparamétricas de módulos indescomponibles de tal manera que cualquier A -módulo indescomponible de dimensión $\mathbf{d} \in \mathbb{N}$ es isomorfo a algún módulo en una de estas familias. Las de tipo de representación infinita que no son mansas se llaman **salvajes**.*

DEFINICIÓN 3.1.3. *Decimos que un álgebra A es **hereditaria a derecha** si todo ideal a derecha de A es proyectivo como A -módulo. Decimos que un álgebra A es **hereditaria a izquierda** si todo ideal a izquierda de A es proyectivo como A -módulo. En el contexto de álgebras de dimensión finita, A es hereditaria a derecha si y solamente si lo es a izquierda y por lo tanto las llamaremos simplemente **hereditarias** (este resultado y el siguiente teorema se encuentran en el capítulo VII de [2]).*

TEOREMA 3.1.4. (a) *Si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico, entonces $A = kQ$ es hereditaria.*

(b) *Si A es un álgebra básica, conexa y hereditaria, consideremos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales. Entonces $A \simeq kQ$ con Q un carcaj finito, conexo y acíclico ($|Q_0| = n$).*

Diagramas Euclidianos La siguiente proposición (con su demostración



correspondiente) se encuentra en el capítulo VII de [2]

PROPOSICIÓN 3.1.7. Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico y \bar{Q} el grafo subyacente asociado a Q .

- (a) \bar{Q} es un diagrama de Dynkin si y solamente si q_Q es definida positiva.
- (b) \bar{Q} es un diagrama Euclideo si y solamente si q_Q es semidefinida positiva pero no definida positiva.
- (c) \bar{Q} no es un diagrama de Dynkin ni Euclideo si y solamente si q_Q es indefinida.

TEOREMA 3.1.8. (Gabriel II) Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico, k un cuerpo algebraicamente cerrado y $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q .

- (a) El álgebra A es de tipo representación finita si y solamente si el grafo subyacente \bar{Q} es uno de los diagramas de Dynkin.
- (b) Si \bar{Q} es un diagrama de Dynkin, la aplicación $\dim : M \mapsto \dim M$ que a cada módulo le asocia su vector dimensión induce una biyección entre las clases de isomorfismo de los A -módulos indescomponibles y el conjunto $\{x \in \mathbb{N}^n : q_Q(x) = 1\}$ de las raíces positivas de la forma cuadrática q_Q de Q .
- (c) El número de clases de isomorfismo de los A -módulos indescomponibles es:

diagrama	numero de clases de isomorfismo
A_n	$\frac{1}{2}n(n+1)$
$D_n(n \geq 4)$	$n^2 - n$
E_6	36
E_7	63
E_8	120

La demostración del siguiente resultado se encuentra en [1] y en [11].

TEOREMA 3.1.9. 1. Sea $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q . Entonces A es de tipo de representación infinita mansa si y solo si Q es un diagrama Euclideo (salvo \tilde{A}_n con todas las flechas en el mismo sentido).

2. Sea $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q con Q ni Dynkin ni Euclideos. Entonces A es salvaje.

3.2. Resultado de Bongartz

Existen varias conexiones entre las álgebras de la forma kQ/I y formas cuadráticas asociadas a estas álgebras.

Asociaremos una forma cuadrática (llamada forma de Tits) a cada álgebra básica cuyo carcaj de Gabriel no tiene ciclos orientados y veremos que un álgebra conexa cuyo carcaj de Auslander-Reiten contiene una componente postproyectiva es de tipo de representación finita si y sólo si su forma de Tits es positiva en vectores positivos.

Relaciones y Extⁿ

Consideremos A una k -álgebra básica de dimensión finita, $A = kQ/I$ (podemos suponer que es una igualdad aunque se trata de un isomorfismo), J el ideal flecha, $\bar{J} = J/I$ y $S = kQ/J = A/\bar{J} = \text{Top}A$.

OBSERVACIÓN 3.2.1. *Observemos que $\text{Ext}_A^1(S, S)$ tiene estructura de kQ -bimódulo al heredar la estructura de kQ -módulo de S .*

En efecto, al ser S un A -módulo y considerando el mapa canónico $\varphi : kQ \rightarrow A = kQ/I$ podemos ver a S como un kQ -módulo con la acción $r.m = \varphi(r).m$. Por otro lado dado $\delta \in \text{Ext}^1(S, S)$, $r \in kQ$ y $\alpha_r : S \rightarrow S$ con $\alpha_r(s) = r.s$ definimos $\alpha_r.\delta$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \delta : & 0 & \rightarrow & S & \rightarrow & U & \rightarrow & S & \rightarrow & 0 \\ & & & \alpha_r \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & Id \\ \alpha_r \delta : & 0 & \rightarrow & S & \rightarrow & \tilde{U} & \rightarrow & S & \rightarrow & 0 \end{array}$$

aplicando el pushout.

De forma análoga se define $\delta\alpha_r$ aplicando el pullback. A continuación daremos la definición del funtor de Nakayama y enunciaremos un resultado referido a los módulos proyectivos e inyectivos que utilizaremos en el lema siguiente. Las demostraciones se encuentran en el capítulo III de [2].

DEFINICIÓN 3.2.2. El funtor de Nakayama $\nu : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A$ se define como $\nu = D\text{Hom}_A(-, A)$.

PROPOSICIÓN 3.2.3. La restricción del funtor de Nakayama $\nu : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A$ a la subcategoría plena $\text{proj}A$ que contiene a los módulos proyectivos induce una equivalencia entre $\text{proj}A$ y la subcategoría plena $\text{inj}A$ que contiene a los módulos inyectivos.

LEMA 3.2.4. Sea $A = kQ/I$. Para cada A -módulo M y cada $a \in Q_0$ tenemos los siguientes isomorfismos de k -espacios vectoriales:

$$\text{Hom}_A(P(a), M) \simeq Me_a \simeq D\text{Hom}_A(M, I(a)).$$

Demostración: Para el primer isomorfismo basta considerar el mapa ϕ que manda $f \mapsto f(e_a) = f(e_a)e_a$ y luego definir su inversa como ϕ' siendo $\phi'(me_a)(e_ap) = me_ap$ para $p \in A, m \in M$. Para el segundo isomorfismo: $D\text{Hom}(M, I(a))$ es isomorfo por el funtor de Nakayama a $D\text{Hom}_A(M, D(Ae_a)) \simeq D\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(Ae_a, DM) \simeq D(e_aDM) \simeq D(DM)e_a \simeq Me_a$.

LEMA 3.2.5. $\text{Ext}_A^1(S(a), S(b))$ y $D(e_aJ/J^2e_b)$ con $a, b \in Q_0$ son isomorfos como KQ -módulos.

Demostración: Consideremos

$$\dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} S(a) \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva minimal de $S(a)$. Para calcular $\text{Ext}_A^1(S(a), S(b))$ consideramos el siguiente complejo:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, S(b)) \xrightarrow{\text{Hom}_A(p_1, S(b))} \text{Hom}_A(P_1, S(b)) \xrightarrow{\text{Hom}_A(p_2, S(b))} \text{Hom}_A(P_2, S(b)) \xrightarrow{\text{Hom}_A(p_3, S(b))} \text{Hom}_A(P_3, S(b)) \rightarrow \dots$$

que se obtiene de sacar $S(a)$ de la resolución proyectiva y aplicarle al complejo el funtor $\text{Hom}_A(-, S(b))$.

Se probará primero que $\text{Hom}_A(p_{i+1}, S(b)) = 0 \forall i \geq 0$.

Sea $f \in \text{Hom}_A(P_i, S(b))$, $f \neq 0$. Como $S(b)$ es simple f es sobreyectiva por lo tanto tenemos que $\bar{f} : \text{top}P_i \rightarrow \text{top}S(b) = S(b)$ es sobreyectivo. Como $\text{top}P_i = \bigoplus S_j$ siendo S_j el top de cada sumando directo indescomponible de P_i . Se tiene que existe un sumando indescomponible P' de P_i tal que $S(b) \simeq \text{top}P'$ y f puede ser escrita como la composición de la proyección canónica $\Pi : P_i \rightarrow P'$ y el mapa canónico $g : P' \rightarrow \text{top}P'$. Ahora $\text{Imp}_{i+1} = \text{Ker}p_i \subset \text{rad}P_i$ por definición de resolución minimal proyectiva (sabemos que existe una resolución proyectiva que cumple esto y es única salvo isomorfismos). Por lo tanto $\text{Hom}_A(p_{i+1}, S(b))(f)(x) = (fp_{i+1})(x) \in f(\text{Imp}_{i+1}) \subset f(\text{rad}P_i) = g\Pi(\text{rad}P_i) = 0$ para $x \in P_i$ y así probamos lo dicho anteriormente.

En particular si calculamos $\text{Ext}_A^1(S(a), S(b))$ por definición tenemos que $\text{Ker}(\text{Hom}_A(p_2, S(b)))/\text{Im}(\text{Hom}_A(p_1, S(b))) \simeq \text{Hom}_A(P_1, S(b))$

Si escribimos $top(radP(a)) = rad(P(a))/rad^2(P(a)) = \bigoplus_{c \in Q_0} S(c)^{n_c}$ entonces la resolución minimal proyectiva de $S(a)$ es de la forma:

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{c \in Q_0} P(c)^{n_c} \rightarrow P(a) \rightarrow S(a) \rightarrow 0$$

Entonces $Ext_A^1(S(a), S(b)) \simeq Hom_A(\bigoplus P(c)^{n_c}, S(b))$ que es equivalente a $Hom_A(rad(P(a))/rad^2 P(a), S(b)) \simeq Hom_A(rad(P(a))/rad^2 P(a), I(b))$ que por el lema anterior es igual a $DHom_A(P(b), radP(a)/rad^2 P(a)) \simeq DHom(e_b A, e_a(radA/rad^2 A)) \simeq D(e_a(radA/rad^2 A)e_b)$. \square

COROLARIO 3.2.6. *Ext¹(S, S) y D(J/J²) son isomorfos como kQ-módulos.*

Encontraremos ahora buenas descripciones para los Ext^n para $n \geq 1$.

- El módulo S tiene la siguiente resolución proyectiva:

$$\cdots \rightarrow P_{2n+1} \xrightarrow{d_{2n+1}} P_{2n} \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow S \rightarrow 0$$

Con $P_{2n} = I^n/I^{n+1}$ y $P_{2n+1} = I^n J/I^{n+1} J$ para $n = 0, 1, 2, \dots$; donde los mapas están inducidos por las inclusiones:

$$\cdots \subset I^n J \subset I^n \subset I^{n-1} J \subset \cdots \subset IJ \subset I \subset J \subset KQ = I^0$$

Además, si $K_n = Ker(P_{n-1} \rightarrow P_{n-2})$, tenemos que $K_{2n} = I^n/I^n J$ y $K_{2n+1} = I^n J/I^{n+1}$:

Demostración: Partimos de $topA = S$ que claramente se cubre con $P_0 = A$ que es proyectivo. Esa cobertura tiene como núcleo al ideal flecha $K_1 = \bar{J}$. Luego, cubrimos a $\bar{J} = J/I$ con $P_1 = J/IJ$ de la forma natural, o sea, llevando al elemento $x + IJ$ en J/IJ al $x + I$ que queda bien definido por la inclusión $IJ \subset I$. El núcleo de este cubrimiento es $K_2 = I/IJ$ (esto sale fácilmente usando los teoremas de isomorfismo), que a su vez se cubre con $P_2 = I/I^2$ nuevamente de forma natural inducido por la inclusión $I^2 \subset IJ$. Siguiendo este proceso obtenemos la resolución deseada, con los núcleos calculados y los mapas obtenidos a partir de las inclusiones ya mencionadas.

Veamos que los P_i son proyectivos, un proyectivo P cualquiera en KQ se escribe de la forma $P = \bigoplus I_i (= P(i))$ con I_i ideales de KQ y por lo tanto, P/IP , los proyectivos de KQ/I , son de la forma $\bigoplus I_i/I(\bigoplus I_i) \simeq \bigoplus I_i/\bigoplus II_i \simeq \bigoplus I_i/II_i$. Entonces si L es ideal de KQ , L/IL es proyectivo y todos los P_i tienen esta forma.

- Para $m \geq 1$ se obtiene que

$$\text{Tor}_m^A(S, S) = \text{Ker}(S \otimes_A K_m \rightarrow S \otimes_A P_{m-1})$$

$$\text{Ext}_A^m(S, S) = \text{Coker}(\text{Hom}_A(P_{m-1}, S) \rightarrow \text{Hom}_A(K_m, S))$$

Demostración: Demostraremos la primera afirmación ya que la segunda es análoga. Por definición,

$\text{Tor}_m^A(S, S) = \text{Ker}(S \otimes_A P_m \rightarrow S \otimes_A P_{m-1}) / \text{Im}(S \otimes_A P_{m+1} \rightarrow S \otimes_A P_m) = M/N$. Queremos ver que $M/N \simeq \text{Ker}(S \otimes_A K_m \rightarrow S \otimes_A P_{m-1}) = M'$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 S \otimes P_{m+1} & \longrightarrow & S \otimes P_m & \longrightarrow & S \otimes P_{m-1} \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & M & & S \otimes K_m & \\
 & \dashrightarrow & & \nearrow & \\
 & & M' & &
 \end{array}$$

g (between $S \otimes P_m$ and $S \otimes K_m$), h (between $S \otimes K_m$ and $S \otimes P_{m-1}$), g' (between M and M')

- g' es un epimorfismo: Sabemos que $g = id \otimes u$ es un epimorfismo ya que u es un epimorfismo. Si $x \in M'$, $h(x) = 0$, como g es epimorfismo existe $y \in S \otimes P_m$ tal que $g(y) = x$. Entonces $y \in M$ y g' es un epimorfismo.
- $\text{Kerg} = \text{Kerg}'$: Al ser g' una restricción de g para ver que sus núcleos coinciden basta ver que $\text{Kerg} \subset M$ y esto es cierto al ser $hg = id \otimes d_m$ y $M = \text{Ker}(id \otimes d_m)$.
- $N = \text{Kerg}$: Para probar esto tomemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow K_{n+1} \xrightarrow{f} P_n \rightarrow K_n \rightarrow 0$$

Que al tensorizar con S obtenemos:

$$S \otimes K_{m+1} \rightarrow S \otimes P_m \xrightarrow{g} S \otimes K_m \rightarrow 0$$

donde $\text{Kerg} = \text{Im}(id \otimes f) = N$.

A continuación enunciaremos el teorema de Watts que será utilizado en el lema siguiente.

TEOREMA 3.2.7. *Si $F : \text{Mod}A \rightarrow \text{Ab}$ es un funtor exacto a derecha que preserva sumas directas, entonces F es naturalmente equivalente a $- \otimes_A B$, donde $B = F(A)$.*

LEMA 3.2.8. 1. Dado X un A -módulo $S \otimes_A X = X/JX$.

$$2. \text{Hom}_A(X, S) = \text{Hom}_A(X, D(S_A)) = D(X/JX).$$

Demostración: Para probar 1. usaremos el teorema de Watts. Consideraremos el funtor $F(X) = X/JX$ sobre los objetos y dado un mapa $f : X \rightarrow X'$ consideramos la restricción $\bar{f} : JX \rightarrow JX'$ ($f(JX) \subset JX'$) y luego pasamos al cociente. Probaremos que es exacto a derecha y preserva sumas.

- F es exacto a derecha:

Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

al aplicar F obtenemos

$$\text{top}(X) \xrightarrow{\bar{f}} \text{top}(Y) \xrightarrow{\bar{g}} \text{top}(Z) \rightarrow 0$$

con $\bar{f}(x+JX) = f(x)+JY$ y $\bar{g}(y+JY) = g(y)+JZ$ (estos mapas están bien definidos ya que $f(JX) \subset JY$ y $g(JY) \subset JZ$). Es claro que \bar{g} es sobreyectivo al serlo g . También es claro que $\bar{g}\bar{f} = 0$ al ser $gf = 0$. Lo que falta probar es que $\text{Ker}(\bar{g}) \subset \text{Im}(\bar{f})$. Tomemos $y + JY \in \text{Ker}(\bar{g})$, $\bar{g}(y + JY) = g(y) + JZ = 0 + JZ$, $g(y) \in JZ$ y al ser la restricción de g , $\hat{g} : JY \rightarrow JZ$ sobreyectiva existe $u \in JY$ tal que $g(u) = g(y)$, o sea $u - y \in \text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. Por lo tanto $u - y = f(x)$ para algún $x \in X$ y $\bar{f}(x + JX) = f(x) + JY = u - y + JY = y + JY$ lo que implica que $y + JY \in \text{Im}(\bar{f})$.

- F preserva sumas:

Esto se debe a que $\text{top}(M \oplus N) = \text{top}(M) \oplus \text{top}(N)$.

En conclusión, aplicando el teorema de Watts, obtenemos que $F \simeq - \otimes_A S$ ya que $S = A/JA$ y así probamos el resultado buscado.

Para probar 2., en la primer igualdad observemos que $D(S_A) \simeq S$. Para la segunda igualdad usamos el morfismo de adjunción de la siguiente forma: $\text{Hom}_A(X, D(S_A)) = \text{Hom}_A(X, \text{Hom}_K(S, K)) \simeq \text{Hom}_K(S \otimes_A X, K) = D(S \otimes_A X) \simeq D(X/JX)$ por la parte 1. \square

TEOREMA 3.2.9. *Sea A una k -álgebra de dimensión finita, $A = kQ/I$, J el ideal flecha y $S = kQ/J$. Entonces tenemos que:*

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{2n}^A(S, S) &= (I^n \cap JI^{n-1}J)/(JI^n + I^nJ) = \text{DExt}_A^{2n}(S, S) \quad \forall n \geq 1 \quad y \\ \text{Tor}_{2n+1}^A(S, S) &= (JI^n \cap I^nJ)/(I^{n+1} + JI^nJ) = \text{DExt}_A^{2n+1}(S, S) \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Demostración: $\text{Tor}_{2n}^A(S, S) = \text{Ker}(S \otimes_A K_{2n} \rightarrow S \otimes_A P_{2n-1}) = \text{Ker}(S \otimes_A I^n / I^n J \xrightarrow{\text{id} \otimes i} S \otimes_A I^{n-1}J / I^n J)$ y por el lema anterior esto es igual a $\text{Ker}(\frac{I^n / I^n J}{(JI^n + I^n J) / I^n J} \rightarrow \frac{I^{n-1}J / I^n J}{JI^{n-1}J / I^n J}) = \frac{I^n / I^n J \cap JI^{n-1}J / I^n J}{JI^n + I^n J / I^n J} = \frac{I^n \cap JI^{n-1}J}{JI^n + I^n J}$.

Por otro lado consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \text{Tor}_n^A(S, S) \rightarrow S \otimes K_n \rightarrow S \otimes P_{n-1}$$

Aplicemos el funtor D y obtenemos:

$$D(S \otimes P_{n-1}) \rightarrow D(S \otimes K_n) \rightarrow D(\text{Tor}_n^A(S, S)) \rightarrow 0$$

que por el lema anterior es igual a:

$$\text{Hom}_A(P_{n-1}, S) \rightarrow \text{Hom}_A(K_n, S) \rightarrow D(\text{Tor}_n^A(S, S)) \rightarrow 0$$

lo que implica que $D(\text{Tor}_n^A(S, S) = \text{Coker}(\text{Hom}(P_{n-1}, S) \rightarrow \text{Hom}(K_n, S)) = \text{Ext}_A^n(S, S)$. En el caso impar el tratamiento es similar. \square

COROLARIO 3.2.10. *Para dos puntos $s, q \in Q_0$ tenemos:*

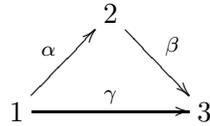
$$\dim_k s(I/(JI + IJ))q = \dim_K \text{Ext}_A^2(S(q), S(s))$$

Demostración: Por el teorema anterior, aplicado para $n=1$ tenemos que $\text{Tor}_2^A(S, S) = I/(JI + IJ) = D\text{Ext}_A^2(S, S)$. Como $S = \bigoplus_{i \in Q_0} S(i)$ y $\dim_K D\text{Ext}_A^2(S, S) = \dim_K \text{Ext}_A^2(S, S)$ tenemos que $\dim_K(\text{Ext}_A(S(q), S(s))) = \dim_K(s(I/IJ + JI)q)$. \square

DEFINICIÓN 3.2.11. *Sea A un álgebra básica, conexa y de dimensión finita cuyo carcaj del teorema de Gabriel (Q_A) no contiene ciclos orientados. Sea $| (Q_A)_0 | = n$. La **forma de Tits** q_A de A es la forma cuadrática $q_A : Z^n \rightarrow Z$ dada por:*

$q_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} + \sum_{s, q \in Q_0} r(s, q) x_s x_q$ con $r(s, q)$ la cantidad de relaciones en el generador minimal R de \mathcal{I} que van de s a q (esto no depende del generador minimal elegido).

EJEMPLO 3.2.12. *Consideremos $A = kQ/\mathcal{I}$ con el siguiente carcaj Q e $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta \rangle$:*



$$q_A(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$$

Decimos que una forma cuadrática q es **débilmente positiva** si $q(x) > 0$ para todo x no nulo con todas sus coordenadas mayores o iguales a cero. Podemos comprobar fácilmente que la forma cuadrática del ejemplo anterior es débilmente positiva al tener todos sus valores propios estrictamente positivos.

DEFINICIÓN 3.2.13. Sea A una k -álgebra. El **Grupo de Grothendieck** de $\text{mod}A$, es el grupo abeliano $G(A) = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ donde \mathcal{F} es el grupo abeliano libre que tiene por base las clases de isomorfismo de $\text{mod}A$ (decimos que \tilde{M} en la clase de M en \mathcal{F}) y \mathcal{F}' el subgrupo de \mathcal{F} generado por los elementos $\tilde{M} - \tilde{N} - \tilde{L}$ que corresponden a la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

en $\text{mod}A$. Denotaremos como $[M]$ a los elementos de \mathcal{F}/\mathcal{F}' .

TEOREMA 3.2.14. Sea A un álgebra básica finito dimensional y sea $\{S(1), S(2), \dots, S(n)\}$ un conjunto completo de las clases de isomorfismo de los módulos simples (a derecha).

Entonces el Grupo de Grothendieck $G(A)$ de $\text{mod}A$ es un grupo abeliano libre teniendo como base a $\{[S(1)], [S(2)], \dots, [S(n)]\}$ y existe un único isomorfismo de grupos $\dim : G(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ tal que $\dim[M] = \dim M$ para cada módulo M .

DEFINICIÓN 3.2.15. Consideremos $G(A)$ el grupo de Grothendieck y consideremos:

$B_A : G(A) \times G(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ la cual asigna el número $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k \text{Ext}_A^i(M, N)$ al par $([M], [N])$ que consiste en los representantes de los A -módulos M y N .

Para ver que $B_A([M], [N])$ está bien definido tomemos otro representante de la clase de M y veamos que B_A coincide. Consideremos $[M] = [L] + [T]$ con

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow T \rightarrow 0$$

un sucesión exacta corta. A partir de esta tenemos la sucesión exacta larga (finita ya que $\dim.\text{gl}.A < \infty$):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(T, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(L, N) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^1(L, N) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_A^2(T, N) \rightarrow \text{Ext}_A^2(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^2(L, N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$\dim \text{Hom}_A(T, N) - \dim \text{Hom}_A(M, N) + \dim \text{Hom}_A(L, N) - \dim \text{Ext}_A^1(T, N) + \dim \text{Ext}_A^1(M, N) - \dim \text{Ext}_A^1(L, N) + \dim \text{Ext}_A^2(T, N) - \dots = 0$ lo que implica que $B_A([M], [N]) = B_A([L] + [T], [N])$.

A partir de esta podemos definir $\chi_A[M] = B_A([M], [M])$.

El siguiente resultado se encuentra en [9].

TEOREMA 3.2.16. *Sea A una k -álgebra básica finito dimensional de dimensión global menor o igual que dos. Si suponemos que el carcaj de Gabriel no tiene ciclos orientados, entonces χ_A y q_A coinciden.*

DEFINICIÓN 3.2.17. *Una componente C de un carcaj de Auslander Reiten de una k -álgebra finito dimensional se llama **postproyectiva** si C no contiene ciclos orientados y consiste de τ -órbitas que contienen proyectivos.*

TEOREMA 3.2.18. (Bongartz 1983) *Sea A una k -álgebra básica finito dimensional, cuyo carcaj de Gabriel es conexo y no tiene ciclos orientados. Supongamos que el carcaj de Auslander Reiten contiene una componente postproyectiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A es tipo de representación finita.
2. Para cada $d \in \mathbb{N}^{\mathcal{Q}_0}$ hay una cantidad finita de clases de isomorfismo de representaciones teniendo dimensión d .
3. La forma de Tits q_A es débilmente positiva.

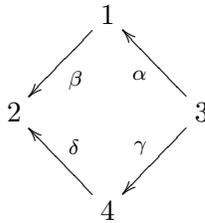
3.3. Sobre la existencia de componente postproyectiva

En el transcurso del trabajo varias veces intentamos utilizar criterios que pedían una componente postproyectiva (por ejemplo el teorema de Bongartz que no dejamos de enunciar en este trabajo por su importancia en la teoría) y más adelante entendimos que esta hipótesis no era fácil de comprobar y en muchos de los casos no se cumpliría.

Veamos ahora, una condición suficiente pero no necesaria para asegurar la existencia de una componente postproyectiva, la condición de separación.

DEFINICIÓN 3.3.1. *Sea A un álgebra con su carcaj asociado Q_A acíclico. Un módulo proyectivo indescomponible $P(a)_A$ tiene un **radical separado** si dados dos sumandos indescomponibles distintos M y N de $\text{rad}P(a)_A$, los soportes de M y N están en componentes distintas del subcarcaj pleno $Q_A(\vec{a})$ de Q_A generado por los no predecesores de a . El álgebra A satisface la **condición de separación** si cada A -módulo proyectivo indescomponible tiene radical separado.*

EJEMPLO 3.3.2. *Sea A dado por el siguiente carcaj:*



1. con la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. Los radicales de los proyectivos indescomponibles son indescomponibles o cero por lo tanto cumple con la condición de separación.
2. con la relación $\alpha\beta = 0$. Vemos que $\text{rad}P(3) = P(4) \oplus S(1)$ y $Q_A(\vec{3}) = \{1, 2, 4\}$ por lo tanto no cumple la condición de separación.

TEOREMA 3.3.3. *Sea A un álgebra. Si A satisface la condición de separación, entonces A admite una componente postproyectiva.*

La demostración de este teorema se encuentra en el capítulo IX de [2]. Veamos ahora una condición necesaria y suficiente para la existencia de componente postproyectiva de $J.A$ de la Peña y S. Kasjan.

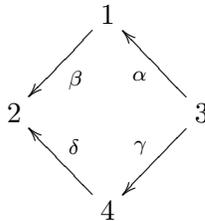
DEFINICIÓN 3.3.4. *Sea $X \in \text{mod } A$, decimos que X es director si no existen sumandos indescomponibles X_1, X_2 de X e Y un indescomponible no proyectivo tal que $X_1 \leq \tau_A Y$ y $Y \leq X_2$ ($Y \leq Z$ indescomponibles si existe una cadena de mapas no nulos $Y = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y_t = Z$ con Y_i indescomponibles con $i = 1, 2, \dots, t$).*

DEFINICIÓN 3.3.5. *Definimos A^i como el cociente de A formado por la subcategoría plena de A con vértices j tal que no existe un camino de j a i en Q .*

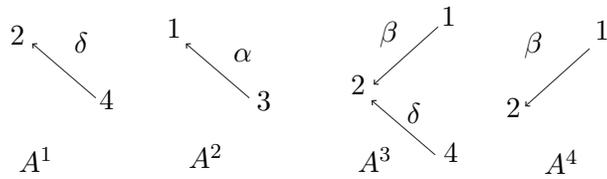
TEOREMA 3.3.6. *Existe una componente postproyectiva en Γ_A si y solo si para cada vértice $i \in Q_0$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

- (a) *Existe una componente postproyectiva Γ' de Γ_{A^i} tal que ningún sumando directo indescomponible de $\text{rad}P_i$ pertenece a Γ' .*
- (b) *$\text{rad}P_i$ es un A^i -módulo director y cada sumando indescomponible de $\text{rad}P_i$ tiene una cantidad finita de predecesores en $\text{mod } A$, todos ellos directores.*

EJEMPLO 3.3.7. *Consideremos el siguiente carcaj con relaciones:*



Con las relaciones $\alpha\beta = 0$ y $\gamma\delta = 0$ Calculemos A^i :



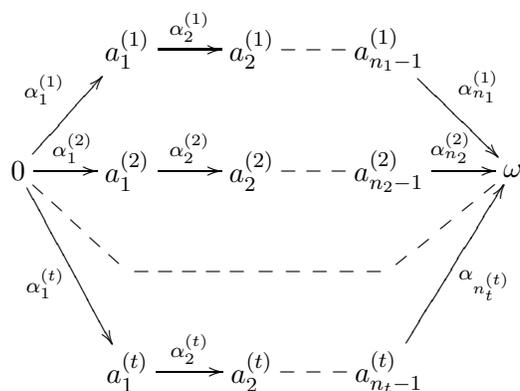
Calculemos ahora $\text{rad}(P_i)$: $\text{rad}(P_1) = S(2)$, $\text{rad}(P_2) = 0$, $\text{rad}(P_3) = S(1) \oplus S(4)$, $\text{rad}(P_4) = S(2)$. Observemos que $S(2)$ es director como A^1 y A^4 -módulo y no tiene predecesores y $\text{rad}(P_3)$ es director como A^3 -módulo ya que no hay flechas entre $S(1)$ y $S(4)$ y tanto $S(1)$ como $S(4)$ tienen predecesores directores.

Capítulo 4

Clasificación de las álgebras Toupie

4.1. Álgebras canónicas

DEFINICIÓN 4.1.1. *Dados $n_1, n_2, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ no nulos con $t \geq 2$, sea $\Delta(n_1, n_2, \dots, n_t)$ el carcaj obtenido de la unión disjunta de carcajes lineales ordenados de tipo $A_{n_1+1}, A_{n_2+1}, \dots, A_{n_t+1}$, identificando todas las fuentes con un mismo vértice 0 y todos los pozos con un sólo vértice ω . Por lo tanto $\Delta(n_1, n_2, \dots, n_t)$ tiene la siguiente forma:*



Llamaremos $\alpha^{(s)}$ a $\alpha_1^{(s)}\alpha_2^{(s)}\dots\alpha_{n_s}^{(s)}$ y consideraremos R , el espacio vectorial con base $\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(t)}\}$.

Un subespacio J de R se dice genérico si $\dim J = t - 2$ y la intersección de J con cualquier subespacio de dimensión dos de la forma $\langle \alpha^{(s)}, \alpha^{(s')} \rangle$ ($s \neq s'$) es cero.

Las álgebras definidas por el carcaj $\Delta(n_1, n_2, \dots, n_t)$ con relaciones genéricas que generan J se llaman **álgebras canónicas de tipo** (n_1, n_2, \dots, n_t) .

PROPOSICIÓN 4.1.2. *Dada un álgebra canónica de tipo (n_1, n_2, \dots, n_t)*

con relaciones genéricas que generan J es isomorfa a un álgebra con el mismo carcaj asociado y con ideal $I = \langle \alpha^{(i)} - \alpha^{(1)} - \lambda_i \alpha^{(2)}, i = 3, \dots, t \rangle$.

Demostración: Consideremos las $t - 2$ relaciones genéricas que definen J y la matriz $A = ((b_{ij}))$ con b_{ij} el coeficiente asociado a la rama $\alpha^{(j+2)}$ en la relación i para $j = 1, \dots, t - 2$ y b_{ij} el coeficiente asociado a la rama $\alpha^{(j-t+2)}$ en la relación i para $j = t - 1, t$. Como $\dim J = t - 2$ la forma escalerizada reducida de A tendrá exactamente $t - 2$ escalones. Además tendrá la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,t-1} & a_{1,t} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,t-1} & a_{2,t} \\ \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{t-2,t-1} & a_{t-2,t} \end{pmatrix}$$

ya que si hubiera algún escalón de largo 2 quedarían solo 1 o 2 variables no nulas en la última fila y la intersección de J con cualquier subespacio de dimensión dos de la forma $\langle \alpha^{(s)}, \alpha^{(s')} \rangle$ ($s \neq s'$) es cero. Esto último también implica que $a_{i,t-1} \neq 0$ y $a_{i,t} \neq 0$ con $i = 1, \dots, t - 2$. Realizando operaciones elementales en las filas de la matriz podemos llegar a la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & -1 & c_{1,t} \\ 0 & c_{2,2} & \cdots & 0 & -1 & c_{2,t} \\ \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{t-2,t-2} & -1 & c_{t-2,t} \end{pmatrix}$$

Estamos muy cerca de obtener el resultado que buscamos, faltaría obtener $c_{i,i} = 1$ $i = 1, 2, \dots, t - 2$. Para lograr esto consideraremos el siguiente morfismo de álgebras. Primero consideramos $f : kQ \rightarrow kQ$, el álgebra de caminos asociada al carcaj del álgebra canónica con $f(i) = i \forall i \in Q_0$, $f(\alpha_1^i) = \frac{1}{c_{i,i}} \alpha_1^i$ con $i = 3, \dots, t$ y $f(\alpha_j^k) = \alpha_j^k$ en el resto de las flechas. Luego observemos que $f(J) = I$ y por lo tanto se puede definir el mapa $g : kQ/I \rightarrow kQ/J$ que resulta ser un isomorfismo. \square

La clasificación de las álgebras canónicas según su tipo de representación es un problema ya resuelto y el resultado correspondiente lo veremos a continuación pero antes algunos resultados y definiciones previas.

4.1.1. Álgebras concealed

DEFINICIÓN 4.1.3. Un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de categorías plenas de mod A se llama un **par de torsión** si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}$, $N \in \mathcal{F}$.

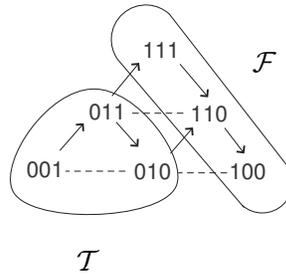
(b) $\text{Hom}_A(M, \)|_{\mathcal{F}} = 0$ implica que $M \in \mathcal{T}$.

(c) $\text{Hom}_A(\ , N)|_{\mathcal{T}} = 0$ implica $N \in \mathcal{F}$.

EJEMPLO 4.1.4. Sea $A = kQ$ con Q :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Sea $\mathcal{T} = \text{add}\{010 \oplus 011 \oplus 001\}$ ($\text{add}M$ es la subcategoría plena de $\text{mod}A$ más pequeña que contiene a M) y $\mathcal{F} = \text{add}\{100 \oplus 110 \oplus 111\}$ (los módulos están dados por sus respectivas dimensiones). Entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión. Podemos ilustrar esta situación con el carcaj de Auslander-Reiten asociado a kQ indicando \mathcal{T} y \mathcal{F} .



DEFINICIÓN 4.1.5. Sea A una k -álgebra de dimensión finita. Un A -módulo se llama inclinante si se cumple:

(T1) $\text{pd}T_A \leq 1$,

(T2) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$,

(T3) Existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow A_A \rightarrow T'_A \rightarrow T''_A \rightarrow 0$$

con T'_A, T''_A en $\text{add}T$.

OBSERVACIÓN 4.1.6. La condición (T3) se puede reformular con la siguiente versión:

(T3') Para todo A -módulo proyectivo indescomponible (P_A) existe la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow P_A \rightarrow T'_A \rightarrow T''_A \rightarrow 0$$

con $T'_A, T''_A \in \text{add}(T)$.

EJEMPLO 4.1.7. *Veamos un ejemplo de módulo inclinante. Consideremos kQ el álgebra de caminos del siguiente carcaj:*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

y el módulo $T = 100 \oplus 111 \oplus 001$ (nuevamente estamos dando los módulos a partir de sus dimensiones). Observemos que 001 es P_3 , 111 es P_1 e I_3 y 100 es I_1 .

Veamos que T es un módulo inclinante:

Se cumple (T1) al ser kQ un álgebra hereditaria.

Para ver (T2) calculamos: $Ext^1(T, T) = Ext^1(100, 001)$ que por la fórmula de Auslander-Reiten es igual a $DHom(001, \tau(100)) = DHom(001, 010) = 0$. Por último, concluimos que se cumple (T3') ya que consideramos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow I_1 \rightarrow 0.$$

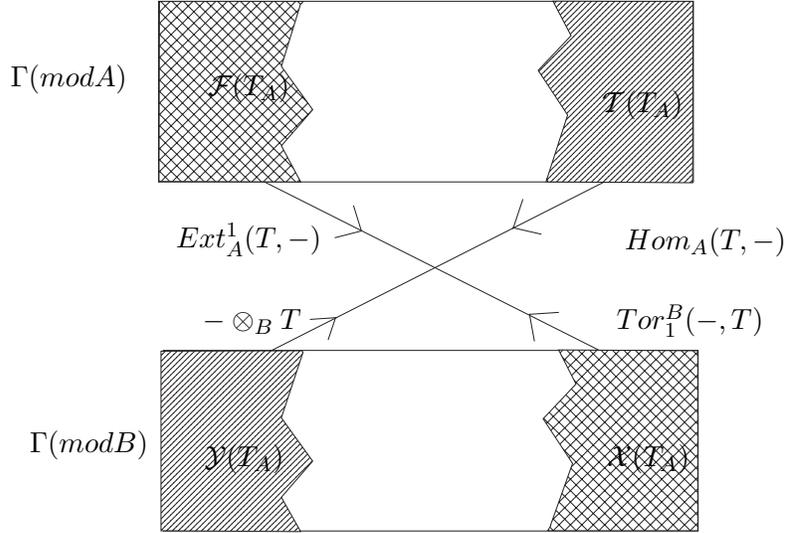
OBSERVACIÓN 4.1.8. *Sea A un álgebra y T_A un A -módulo inclinante. Si $B = End_A T$ y dado $b \in B$, $t \in T$ definimos la acción $b.t = b(t)$ obtenemos que T tiene estructura de B -módulo a izquierda.*

PROPOSICIÓN 4.1.9. *Sea A un álgebra y T_A un A -módulo inclinante con $B = End_A T$. Entonces T_A induce un par de torsión en $mod A$ siendo $\mathcal{T}(T) = \{M_A | Ext^1(T, M) = 0\}$, $\mathcal{F}(T) = \{M_A | Hom_A(T, M) = 0\}$ e induce un par de torsión en $mod B$ siendo $\mathcal{X}(T_A) = \{N_B | N \otimes_B T = 0\}$ e $\mathcal{Y}(T_A) = \{N_B | Tor_1^B(N, {}_B T)\} = 0$.*

TEOREMA 4.1.10. *Sea A un álgebra, T_A un módulo inclinante, $B = End T_A$, y $(\mathcal{T}(T_A), \mathcal{F}(T_A))$, $(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A))$ el par de torsión inducido en $mod A$ y $mod B$, respectivamente. Entonces:*

- (a) *${}_B T$ es un módulo inclinante, y el homomorfismo canónico de k -álgebras $A \rightarrow End({}_B T)^{op}$ definido como $a \mapsto (t \rightarrow ta)$ es un isomorfismo.*
- (b) *Los funtores $Hom_A(T, -)$ y $- \otimes_B T$ inducen una equivalencia entre $\mathcal{T}(T_A)$ e $\mathcal{Y}(T_A)$.*
- (c) *Los funtores $Ext_A^1(T, -)$ y $Tor_1^B(-, T)$ inducen una equivalencia entre $\mathcal{F}(T_A)$ y $\mathcal{X}(T_A)$.*

Los resultados anteriores se encuentran en [2]. Es posible visualizar la equivalencia mencionada en el teorema anterior en los carcajes de Auslander-Reiten de las álgebras A y B . Veamos la siguiente figura:



DEFINICIÓN 4.1.11. Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico que no es un diagrama Dynkin. Un álgebra B se llama concealed de tipo Q si existe un módulo inclinante postproyectivo T de $A = kQ$ tal que $B = \text{End}T_A$.

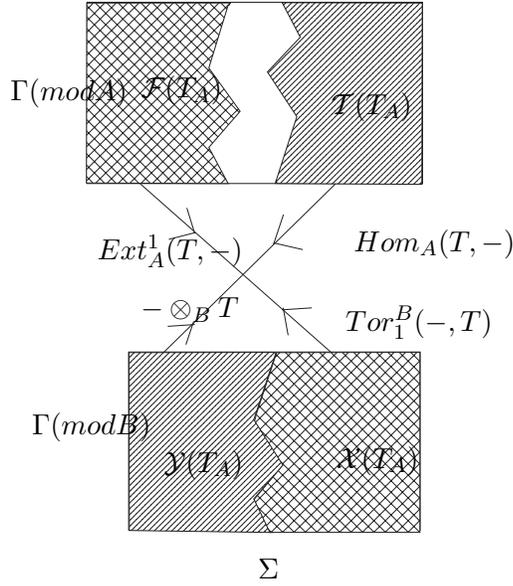
DEFINICIÓN 4.1.12. Sea (Γ, τ) un carcaj conexo de traslación. Un subcarcaj pleno y conexo Σ de Γ es una sección de Γ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Σ es acíclico.
2. Para cada $x \in \Gamma_0$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.
3. Si $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_t$ es un camino en Γ con $x_0, x_t \in \Sigma_0$ entonces $x_i \in \Sigma_0$, para todo $0 \leq i \leq t$.

Los siguientes resultados de esta subsección se encuentran en el capítulo VIII de [2].

TEOREMA 4.1.13. Sea A un álgebra hereditaria, T_A un módulo inclinante y $B = \text{End}T_A$. Entonces la clase Σ de todos los B -módulos de la forma $\text{Hom}_A(T, I)$, con I un A -módulo inyectivo indescomponible está en una componente acíclica \mathcal{C}_T de $\Gamma(\text{mod}B)$ y forma una sección. Más aún, Σ es isomorfa a Q_A^{op} , todo predecesor de Σ en \mathcal{C}_T está en $\mathcal{Y}(T)$, y todo sucesor estricto de Σ en \mathcal{C}_T está en $\mathcal{X}(T)$.

Veamos un dibujo de la situación en este caso donde el álgebra es hereditaria:



OBSERVACIÓN 4.1.14. *A la componente \mathcal{C}_T del teorema anterior la llamaremos **componente conectora** ya que conecta $\mathcal{X}(T)$ con $\mathcal{Y}(T)$ a través de la sección. Observar, que en este caso, todo módulo indescomponible está en $\mathcal{Y}(T_A)$ o $\mathcal{X}(T_A)$. En este sentido tenemos una descripción total de $\text{mod}B$ a partir de $\text{mod}A$ y al ser A un álgebra hereditaria, $\text{mod}A$, es en general conocida.*

TEOREMA 4.1.15. *Sea A un álgebra hereditaria de tipo de representación infinita, T un módulo postproyectivo inclinante, y $B = \text{End}T_A$.*

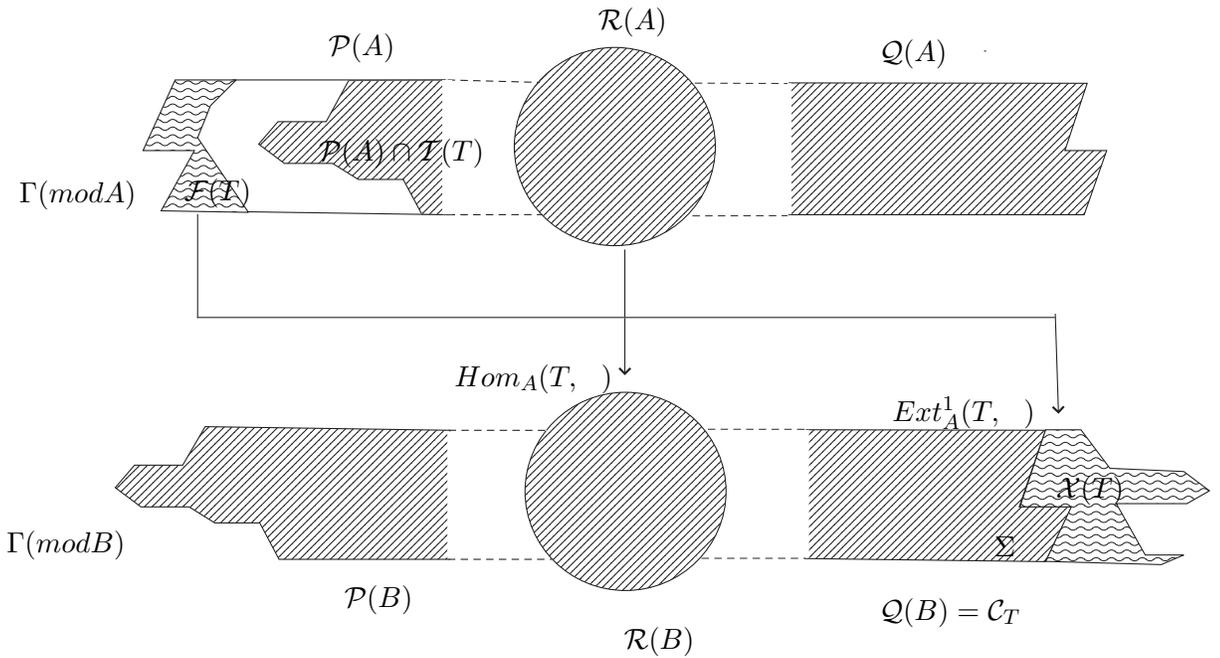
- (a) $\mathcal{T}(T)$ contiene todos los A -módulos indescomponibles no isomorfos salvo una cantidad finita, y todo A -módulo indescomponible que no está en $\mathcal{T}(T)$ es postproyectivo.
- (b) $\mathcal{F}(T)$ contiene una cantidad finita de A -módulos indescomponibles no isomorfos, y todos ellos son postproyectivos.
- (c) La componente conectora \mathcal{C}_T de $\Gamma(\text{mod}B)$ determinada por T es una componente preinyectiva $\mathcal{Q}(B)$ que contiene todos los módulos indescomponibles inyectivos y todos los módulos indescomponibles de $\mathcal{X}(T)$, $\mathcal{Q}(B)$ no contiene a los módulos proyectivos.
- (d) La imagen por el funtor $\text{Hom}_A(T, -)$ de las componentes regulares de A , $\mathcal{R}(A)$, forma una familia $\mathcal{R}(B)$ de componentes regulares en $\Gamma(\text{mod}B)$.
- (e) La imagen por el funtor $\text{Hom}_A(T, -)$ de los módulos postproyectivos de torsión ($\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{T}(T)$) forma una componente postproyectiva $\mathcal{P}(B)$

que contiene los B -módulos proyectivos indescomponibles y no contiene módulos inyectivos.

(f) $\Gamma(\text{mod}B)$ es la unión disjunta de $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{Q}(B)$ y tenemos que:
 $0 = \text{Hom}_B(\mathcal{R}(B), \mathcal{P}(B)) = \text{Hom}_B(\mathcal{Q}(B), \mathcal{P}(B)) = \text{Hom}_B(\mathcal{Q}(B), \mathcal{R}(B))$.

(g) $\text{pd}Z \leq 1$ e $\text{id}Z \leq 1$ para todo módulo regular Z y todos los B -módulos indescomponibles no isomorfos, salvo una cantidad finita, están en $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{Q}(B)$.

Podemos representar el resultado anterior con la siguiente figura:



Esto nos da una descripción precisa de la forma del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra concealed $B = \text{End}(T_A)$ conociendo el carcaj de Auslander-Reiten de A . También, en este caso, excepto una cantidad finita de módulos, podemos describir el carcaj de Auslander-Reiten de A a partir del de B .

El siguiente resultado clasifica completamente a las álgebras canónicas con respecto a su tipo de representación y su prueba se encuentra en [7].

TEOREMA 4.1.16. *Consideremos las álgebras canónicas $\Lambda = \Lambda(\mathbf{p}, \lambda)$ dependiendo de $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_t)$ donde p_i es el largo de la rama i y $\lambda = (\lambda_3, \dots, \lambda_t)$ los coeficientes que definen las relaciones en Λ . La clasificación de estas álgebras queda determinada a partir del siguiente número:*

$$g_\chi = 1 + \frac{1}{2}((t-2)p - \sum_{i=1}^t \frac{p}{p_i}) \text{ donde } p = \text{mcm}(p_1, p_2, \dots, p_t).$$

Si $g_\chi < 1$ el álgebra Λ es concealed de tipo Euclideano, en particular es mansa.

Si $g_\chi = 1$ el álgebra es mansa (esta álgebra es de tipo tubular, el estudio de estas álgebras se encuentra en [11] o resumido en el apéndice de la tesis).

Si $g_\chi > 1$ el álgebra es la extensión por un punto de un álgebra hereditaria salvaje, en particular ella misma es salvaje.

OBSERVACIÓN 4.1.17. *Observemos que en el caso $t = 3$ el álgebra será mansa si $g_\chi = 1 + \frac{1}{2}(p - \frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_2} - \frac{p}{p_3}) \leq 1$. Esto se cumple solo en los siguientes casos:*

1. Si $p_1 = 2$ y se verifica alguna de las siguientes condiciones
 - a) $p_2 = 2$.
 - b) $p_2 = 3$ y $3 \leq p_3 \leq 6$.
2. Si $p_1 = 3, p_2 = 3$ y $p_3 = 3$.

Observemos también que si $t = 4$ el álgebra será mansa si $g_\chi = 1 + \frac{1}{2}(2p - \frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_2} - \frac{p}{p_3} - \frac{p}{p_4}) \leq 1$ y esto solo se da si $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2$.

4.2. Álgebras Toupie

En esta sección definiremos con precisión las álgebras que vamos a clasificar más adelante.

Las álgebras Toupie fueron introducidas en el trabajo: *Toupie algebra, some examples of laura algebras* realizado por Diane Castonguay, Julie Dionne, Francois Huard y Marcelo Lanzilotta ([4]). Estas álgebras se pueden ver como una generalización de las álgebras canónicas. El interés por estas álgebras proviene de la idea de que cualquier carcaj de un álgebra triangular (Q , el carcaj asociado no posee ciclos orientados) se puede pensar como unión de subcarcajes Toupie. Entonces podremos obtener propiedades de estas álgebras a partir de propiedades de las Toupie.

DEFINICIÓN 4.2.1. *Un carcaj Q es Toupie si tiene una única fuente (0) y un único pozo (ω) , y además, dado otro vértice x , comienza en x exactamente una flecha y termina en x exactamente una flecha.*

DEFINICIÓN 4.2.2. *Un álgebra de la forma kQ/I es Toupie si Q es un carcaj Toupie.*

OBSERVACIÓN 4.2.3. *Las álgebras canónicas son un ejemplo de Toupie (las álgebras Toupie se originaron como generalización de las canónicas como fue comentado al inicio de la sección).*

OBSERVACIÓN 4.2.4. (Notación) *Los caminos de 0 (la única fuente) a ω (el único pozo) se llaman ramas. A continuación presentaremos algunas notaciones útiles.*

$$D = \dim_k e_\omega A e_0$$

Si b_1, \dots, b_B son las ramas:

1. b_1, \dots, b_b son las ramas que contienen relaciones no monomiales.
2. b_{b+1}, \dots, b_{b+h} son las ramas que contienen relaciones monomiales con la primera relación comenzando en 0 y de largo 2 y la última relación terminando en ω y de largo 2.
3. $b_{b+h+1}, \dots, b_{b+h+o}$ son las ramas con relaciones monomiales que no cumplen alguna de las condiciones de $\in..$
4. $b_{b+h+o+1}, \dots, b_{b+m+f+o+a=B}$ son las ramas sin relaciones.

DEFINICIÓN 4.2.5. *Dada A un álgebra Toupie definimos A_0 como $(1 - e_0)A(1 - e_0)$ y A_ω como $(1 - e_\omega)A(1 - e_\omega)$. Para determinar A_0 lo que hacemos es considerar el subcarcaj pleno que obtenemos al quitar el vértice cero con todas las relaciones que tienen su soporte en este subcarcaj. En forma análoga determinamos A_ω .*

OBSERVACIÓN 4.2.6. *Las álgebras A_0 y A_ω son tales que $A = A_0[\text{rad}P_0]$ y $A = [I_\omega/\text{soc}I_\omega]A_\omega$.*

4.3. Cobertura universal

El siguiente tema es muy amplio y daremos simplemente un pequeño resumen ya que aparece como uno de los argumentos en la clasificación.

DEFINICIÓN 4.3.1. *Un morfismo entre carcajes $f : Q \rightarrow C$ es una función $f : Q_0 \cup Q_1 \rightarrow C_0 \cup C_1$ y tal que $f(Q_0) \subset C_0$, $f(Q_1) \subset C_1$, $f(s(\alpha)) = s(f(\alpha))$ y $f(t(\alpha)) = t(f(\alpha))$ para toda $\alpha \in Q_1$.*

DEFINICIÓN 4.3.2. *Un morfismo entre carcajes con relaciones $f : (Q, I) \rightarrow (C, J)$ es un morfismo de carcajes que verifica que $f(I) \subset J$.*

DEFINICIÓN 4.3.3. Dado G un grupo de automorfismos de (Q, I) , definimos el carcaj Q/G . Los vértices y las flechas en Q/G son las órbitas de Q_0 y Q_1 bajo la acción de G , o sea $(Q/G)_0 = Q_0/G$ y $(Q/G)_1 = Q_1/G$. El ideal \bar{I} lo definimos como el generado por $\pi(I)$, donde π es la proyección canónica.

DEFINICIÓN 4.3.4. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Un grupo de automorfismos G de (Q, I) se llama admisible si ninguna órbita de G en Q_0 tiene más de un vértice en x^+ o x^- , con $x \in Q_0$.

DEFINICIÓN 4.3.5. Un morfismo de carcajes con relaciones $f : (\Delta, J) \rightarrow (Q, I)$ es cubriente si existe un grupo admisible G de (Δ, J) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (\Delta, J) & & \\
 \downarrow \pi & \searrow f & \\
 (\Delta/G, \bar{J}) & \xrightarrow{\cong} & (Q, I)
 \end{array}$$

siendo π la proyección canónica

DEFINICIÓN 4.3.6. Decimos que (Q, I) es localmente de representación finita si para todo $x \in Q_0$ existe una cantidad finita de representaciones indescomponibles no isomorfas con soporte finito que contiene a x .

EJEMPLO 4.3.7. 1. Consideremos el carcaj A_∞ (una extensión de A_n con infinitos puntos a ambos lados) sin relaciones, con todas las flechas apuntando hacia el mismo lado:

$$\dots a_0^{-1} \xrightarrow{\alpha_0^{-1}} a_1^{-1} \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}^{-1}} a_n^{-1} \xrightarrow{\alpha_n^{-1}} a_0^0 \xrightarrow{\alpha_0^0} a_1^0 \dots$$

Este carcaj no es localmente de representación finita:

Dado un punto x del carcaj consideramos los módulos M^i con $M^i(j) = k$ si $x-i \leq j \leq x+i$ y cero en el resto de los puntos. Con respecto a los mapas consideramos Id_k siempre que sea posible. Estos M^i forman una familia infinita de módulos indescomponibles no isomorfos de soporte finito que contienen a x .

2. Considere el mismo carcaj A_∞ del ejemplo anterior pero con las siguientes relaciones :

$$\dots a_0^{-1} \xrightarrow{\alpha_0^{-1}} a_1^{-1} \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}^{-1}} a_n^{-1} \xrightarrow{\alpha_n^{-1}} a_0^0 \xrightarrow{\alpha_0^0} a_1^0 \dots$$

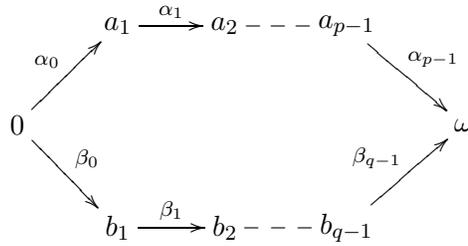
$I = \langle \alpha_0^i \alpha_1^i \rangle$. Entonces (A_∞, I) es localmente de representación finita.

Las demostraciones de los siguientes teoremas se encuentran en [10].

TEOREMA 4.3.8. Si $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \rightarrow (Q, I)$ es cubriente y (Q, I) es localmente de representación finita, entonces (\bar{Q}, \bar{I}) también lo es.

TEOREMA 4.3.9. Sea $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \rightarrow (Q, I)$ morfismo cubriente. Supongamos que $\bar{k} = k$, $\text{car } k = 0$ y Q finito. Si (\bar{Q}, \bar{I}) es localmente de representación finita, entonces (Q, I) es de tipo de representación finita.

EJEMPLO 4.3.10. Considere (Q, I) con $Q = \tilde{A}_n$ para algún n como en la siguiente figura:



con $p + q = n$ e $I = \langle \alpha_0 \alpha_1 \rangle$. Considere ahora (A_∞, \tilde{I}) que se muestra en la siguiente figura:

$$\dots a_1^{-1} \xrightarrow{\alpha_1^{-1}} a_2^{-1} \dots \omega^{-1} \xleftarrow{\beta_n^{-1}} b_n^{-1} \dots 0^0 \xrightarrow{\alpha_0^0} a_1^0 \xrightarrow{\alpha_1^0} a_2^0 \dots$$

con $\tilde{I} = \langle \alpha_o^i \alpha_1^i : i \in \mathbb{Z} \rangle$. Existe un morfismo cubriente π entre (A_∞, \tilde{I}) y (Q, I) con $\pi(0^j) = 0$, $\pi(\omega^j) = \omega$, $\pi(a_i^j) = a_i$ y $\pi(b_i^j) = b_i$ y $G = \langle g \rangle$ con $g : (A_\infty, \tilde{I}) \rightarrow (A_\infty, \tilde{I})$ tal que $g(0^j) = 0^{j-1}$, $g(\omega^j) = \omega^{j-1}$, $g(a_i^j) = a_i^{j-1}$ y $g(b_i^j) = b_i^{j-1}$. En las flechas $g(\alpha)_i^j = \alpha_i^{j-1}$ y $g(\beta)_i^j = \beta_i^{j-1}$.

Al ser (A_∞, \tilde{I}) localmente de representación finita, aplicando el teorema anterior, (Q, I) es de tipo de representación finita.

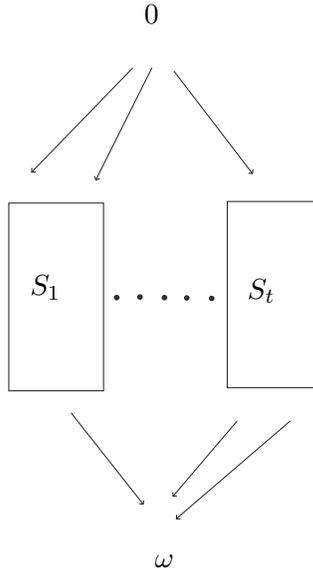
4.4. Álgebras Supercanónicas

Al igual que las álgebras Toupie, pero en otro sentido, las álgebras supercanónicas aparecen como una generalización de las álgebras canónicas. Estas fueron introducidas por Helmut Lenzing y José Antonio de la Peña en 2004 ([7]) y preservan algunas propiedades de las canónicas como poseer una familia uniparamétrica de tubos estables.

DEFINICIÓN 4.4.1. Consideremos un poset S (conjunto parcialmente ordenado) finito. El doble cono ${}^0S_\omega$ es el poset que se obtiene adjuntando a S el menor de los elementos 0 y el mayor de los elementos ω . Llamaremos

k_s a la clase de cualquier camino de 0 en ω . Sean S_1, S_2, \dots, S_t un número finito de posets con $t \geq 2$ y números $\lambda_3, \dots, \lambda_t \in k - \{0\}$ distintos dos a dos.

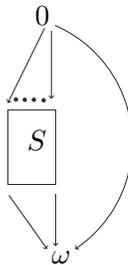
Definimos el álgebra supercanónica $A = \mathcal{S}(S_1, S_2, \dots, S_t; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ como aquella tal que su carcaj se obtiene identificando los 0_i (respectivamente los ω_i) en los conos dobles como en la siguiente figura:



y pidiendo las $t - 2$ relaciones $k_i = k_2 - \lambda_i k_1$, con $i = 3 \dots, t$.

OBSERVACIÓN 4.4.2. Observemos que en la definición de álgebra supercanónica el ideal no necesariamente es admisible. El problema aparece cuando alguno de los posets es vacío y $t > 2$.

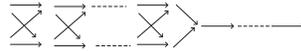
EJEMPLO 4.4.3. 1. En el caso $t = 2$, uno o ambos S_i podrían ser vacíos y nos queda algo del tipo:



Si ambos son vacíos nos queda 2-Kronecker.

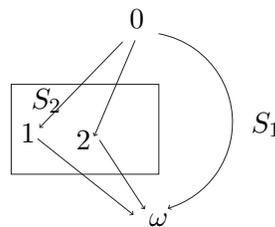
2. En el caso que todas las S_i son lineales les llamaremos supercanónicas de tipo lineal. Si $S_i = A_{n_i}$ obtenemos el álgebra canónica $\Delta(n_1 + 1, \dots, n_t + 1)$.

EJEMPLO 4.4.4. Además de algunos casos de álgebras Toupie hay otros ejemplos de álgebras supercanónicas. Sea S el poset semicadena:



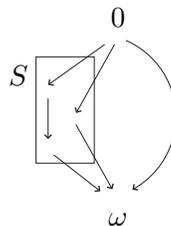
Podemos considerar el álgebra supercanónica $A = \mathcal{S}(S)$.

EJEMPLO 4.4.5. Uno de los casos que nos interesará clasificar aparece como ejemplo en el artículo de Lenzing y de la Peña [8] y es el caso de $t = 2$ con S_1 vacío y S_2 formado por 2 puntos no comparables. Al considerar ${}^0S_\omega$ obtenemos el carcaj que contiene una relación de conmutatividad con dos ramas de largo 2 y luego una flecha.

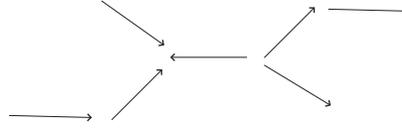


Observemos que en este caso no aparecen relaciones extras al tratarse de $t = 2$. El álgebra supercanónica construida de esta forma es mansa y no acepta una componente postproyectiva. (la demostración de esto se encuentra en [6])

EJEMPLO 4.4.6. Consideremos la siguiente álgebra supercanónica $A = \mathcal{S}(S_1, S_2)$:



La cobertura universal de A contiene la subcategoría hereditaria del tipo:



Utilizando la cobertura universal podemos deducir que A es salvaje.

LEMA 4.4.7. Sea $A = \mathcal{S}(S_1, \dots, S_t; \lambda_3, \dots, \lambda_t)$ un álgebra supercanónica con $t > 2$. Suponga que $B = \frac{A}{(0)}$ es de tipo mansa. Entonces cada S_i es lineal, semicadena o dos puntos no ordenados.

Veamos ahora el resultado principal de esta sección.

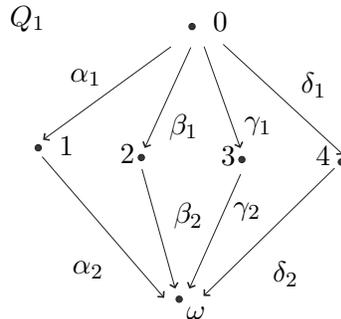
TEOREMA 4.4.8. Sea $A = \mathcal{S}(S_1, \dots, S_t; \lambda_3, \dots, \lambda_t)$ un álgebra supercanónica y $B = \frac{A}{(0)}$. Asumamos que alguna de las siguientes condiciones se cumplen:

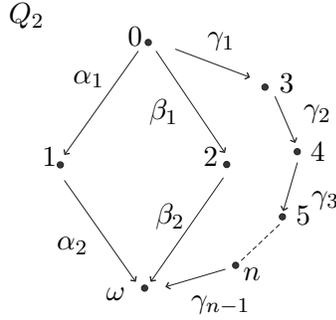
1. $t > 2$.
2. $t = 2$ y tanto S_1 como S_2 son lineales semicadena o $(1) \amalg (1)$ (2 puntos no ordenados).

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es mansa
2. B es mansa
3. $q_A \geq 0$
4. $q_B \geq 0$.

EJEMPLO 4.4.9. Consideremos las siguientes álgebras supercanónicas $A_1 = kQ_1/\mathcal{I}_1$ y $A_2 = kQ_2/\mathcal{I}_2$:





con $\mathcal{I}_1 = \langle \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2 \rangle$

con $\mathcal{I}_2 = \langle \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \rangle$

Se verifica que $B_i = \frac{A_i}{(0)}$ para $i = 1, 2$ es mansa al tratarse de álgebras hereditarias con diagramas Euclidianos y Dynkin asociados. Entonces, aplicando el teorema 4.4.8, podemos concluir que A_i con $i = 1, 2$ es mansa.

4.5. Técnica de Inmersión

DEFINICIÓN 4.5.1. Un functor $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es fiel (resp. pleno) si para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$ la función inducida por T

$$[A, B]_{\mathcal{A}} \rightarrow [T(A), T(B)]_{\mathcal{B}}$$

es inyectiva (resp. sobreyectiva). Un functor covariante lineal, fiel y pleno es una **inmersión fielmente plena**.

DEFINICIÓN 4.5.2. Un functor $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es denso si para todo $B \in \mathcal{B}$ existe un objeto $A \in \mathcal{A}$, tal que $T(A)$ es isomorfo a B .

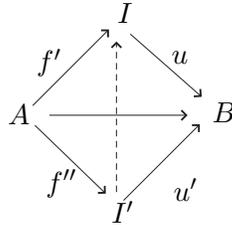
DEFINICIÓN 4.5.3. Sea \mathcal{A} una categoría con objeto cero y $\alpha : A \rightarrow B$ un morfismo en \mathcal{A} . Diremos que un morfismo $\mu : K \rightarrow A$ es un núcleo de α si

- (a) $\alpha\mu = 0$, y
- (b) para todo morfismo $\mu' : K' \rightarrow A$ tal que $\alpha\mu' = 0$ existe un único morfismo $\gamma : K' \rightarrow K$ tal que $\mu\gamma = \mu'$.

DEFINICIÓN 4.5.4. La imagen de un morfismo $f : A \rightarrow B$ se define, como el sub-objeto más pequeño de B que factoriza a f . Esto es, el sub-objeto $\mu : I \rightarrow B$ de B es una imagen de f si:

- (a) existe un morfismo $f' : A \rightarrow I$ tal que $f = \mu f'$, y

(b) si $\mu' : I' \rightarrow B$ es otro sub-objeto de B tal que existe $f'' : A \rightarrow I'$ con $f = \mu' f''$ entonces $\mu \leq \mu'$. Es decir, el triángulo del lado derecho del siguiente diagrama conmuta:



PROPOSICIÓN 4.5.5. Sea $T : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}B$ un funtor lineal, fiel y pleno entre dos categorías de módulos con A, B de dimensión finita. Entonces:

1. T lleva módulos indescomponibles en módulos indescomponibles.
2. T lleva objetos distintos en objetos distintos.

Demostración:

1. Sea M un módulo indescomponible. Consideremos $T(M)$ y $f \in \text{End}_B(T(M))$. Como T es pleno, existe $g \in \text{End}_A(M)$ con $T(g) = f$. Al ser M indescomponible g es nilpotente o invertible. Si g es nilpotente existe n tal que $g^n = 0$ y $T(0) = T(g^n) = T(g)^n = f^n = 0$ por lo tanto f será nilpotente. Si g es invertible existe g' tal que $gg' = Id$ y $g'g = Id$, por lo tanto, $fT(g') = T(gg') = Id = T(g')f$ y f será invertible.
2. Supongamos $T(M) \simeq T(N)$ y sea f un isomorfismo entre ellos. Al ser T pleno existe $g : M \rightarrow N$ con $T(g) = f$. El morfismo g será invertible ya que T es fiel y refleja tanto monomorfismos como epimorfismos lo que implica que $M \simeq N$. \square

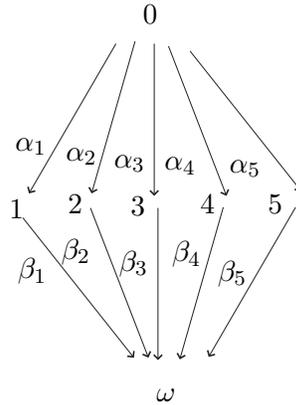
PROPOSICIÓN 4.5.6. Sea $T : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}B$ un funtor lineal, fiel y pleno entre dos categorías de módulos con A, B de dimensión finita tal que $\dim M = \dim T(M)$ para todo $M \in \text{mod}A$. Entonces el tipo de representación de la segunda acota el tipo de representación de la primera. O sea, si B es mansa A deberá ser mansa o de tipo de representación finita (TRF) y si B es de TRF, A también lo es.

Demostración: Supongamos que $\text{mod}B$ es mansa o TRF, dada $d \in \mathbb{N}$ una dimensión fija en $\text{mod}A$ consideremos M , un indescomponible cualquiera con $\dim_k M = d$. Por la proposición 4.5.5 tenemos que $T(M)$ también es indescomponible y tiene dimensión d . Como $\text{mod}B$ es mansa o TRF, sabemos que pertenece a una familia uniparamétrica (no necesariamente infinita) de módulos indescomponibles con esta dimensión y como T lleva objetos distintos en objetos distintos por 4.5.5 podemos asegurar que los módulos indescomponibles de $\dim_k M = d$ forman una familia uniparamétrica de indescomponibles y por lo tanto $\text{mod}A$ es mansa o TRF. \square

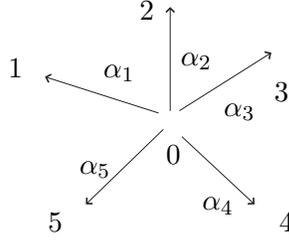
COROLARIO 4.5.7. *Sea $T : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}B$ un funtor lineal, fiel y pleno entre dos categorías de módulos con A, B de dimensión finita con $\dim(M) = \dim(T(M))$ para todo $M \in \text{mod}A$. Entonces si A es salvaje B lo es.*

Veamos una aplicación de este corolario para probar que un álgebra es salvaje.

EJEMPLO 4.5.8. *Consideremos el álgebra $A = kQ/I$ con Q el siguiente carcaj:*

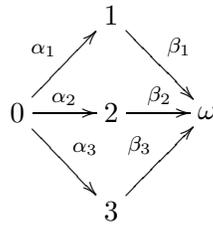


e $I = \langle \alpha_1\beta_1, \alpha_4\beta_4 - \alpha_5\beta_5 \rangle$. Entonces existe un funtor lineal fiel y pleno que mantiene las dimensiones $\mathcal{F} : \text{mod}B \rightarrow \text{mod}A$ siendo B el álgebra hereditaria $B = kQ'$ con Q' el siguiente carcaj:

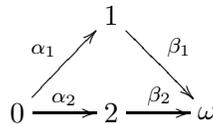


Veamos como se construye el funtor. Dado un módulo M de B , $\mathcal{F}(M) = N$ en $\text{mod}A$ es tal que $N(i) = M(i) \forall i = 0, \dots, 5$ y $N(\omega) = 0$. Además $N_{\alpha_i} = M_{\alpha_i} \forall i = 1, 2, \dots, 5$ y $N_{\beta_i} = 0$. Dado un morfismo de módulos $f : M \rightarrow M'$ construimos $g = \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M')$ de la siguiente forma: $g_i = f_i \forall i = 0, \dots, 5$ y $g_\omega = 0$. Es fácil ver que este funtor es lineal fiel y pleno y por construcción $\dim M = \dim T(M)$ para todo $M \in \text{mod}B$. Usando el corolario anterior y 3.1.9 podemos deducir que A es salvaje. A esta técnica la llamaremos **técnica de inmersión**.

EJEMPLO 4.5.9. Consideremos el álgebra $A = kQ/I$ con Q el siguiente carcaj:



e $I = \langle \alpha_3\beta_3 \rangle$ y el álgebra $B = kQ'$ con Q' el siguiente carcaj:



Veamos como se construye el funtor $\mathcal{F} : \text{mod}B \rightarrow \text{mod}A$. Dado un módulo M de $\text{mod}B$, $\mathcal{F}(M) = N$ en $\text{mod}A$ es tal que $N(i) = M(i)$, $i = 0, 1, 2, \omega$ y $N(3) = 0$. Además $N_{\beta_i} = M_{\beta_i}$ con $i = 1, 2$, $N_{\alpha_i} = M_{\alpha_i}$ con $i = 1, 2$ y $N_{\alpha_3} = 0$, $N_{\beta_3} = 0$. Dado un morfismo de módulos $f : M \rightarrow M'$ construimos $g = \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M')$ de la siguiente forma: $g_i = f_i$ con $i = 0, 1, 2, \omega$ y $g_3 = 0$. Es fácil ver que este funtor es lineal, fiel, pleno y $\dim M = \dim T(M)$ para todo $M \in \text{mod}B$. Usando el teorema 4.5.6 y 3.1.9 podemos deducir que A es de tipo de representación infinita.

4.6. Álgebras asociadas a ciertas álgebras Toupie

En esta sección clasificaremos algunas de las álgebras Toupie. Dada un álgebra Toupie A le asociaremos un álgebra B de la cual conocemos su tipo de representación. Luego construiremos un funtor $F : \text{mod}B \rightarrow \text{mod}A$ con ciertas propiedades para poder deducir que el tipo de representación de B es el de A .

Es claro que si lográramos construir un funtor fiel, pleno y denso entre dos categorías podemos asegurar que el tipo de representación de ambas es el mismo. En nuestro caso podremos construir funtores fieles y densos que conservan la dimensión pero con una condición un poco mas débil que la plenitud. De todas formas nos servirá para obtener el resultado buscado.

DEFINICIÓN 4.6.1. *Sea $T : \text{mod}B \rightarrow \text{mod}A$ un funtor, diremos que el funtor es **casi pleno** si dado un mapa $f : T(M) \rightarrow T(M')$, existe $g : M \rightarrow M'$ y $t \in \text{rad}_B((T(M), T(M')))$ tal que $f = T(g) + t$.*

PROPOSICIÓN 4.6.2. *Sea $T : \text{mod}B \rightarrow \text{mod}A$ un funtor lineal, fiel y casi pleno entre dos categorías de módulos con A, B de dimensión finita. Entonces:*

1. T lleva módulos indescomponibles en módulos indescomponibles.
2. T lleva objetos indescomponibles distintos en objetos indescomponibles distintos.
3. T refleja indescomponibles (si $T(M)$ es indescomponible M lo es).

Demostración: Se demostrará que $\text{End}_A(T(M))$ es local, si M es indescomponible (o sea $\text{End}_B(M)$ es local). Para probar 1. alcanza ver que si $f = T(g) + t$ se cumple lo siguiente:

- (a) Si g es nilpotente, f es nilpotente.
- (b) Si g es invertible, f es invertible.

Probemos primero (a). Sabemos que si g es nilpotente existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = 0$ y por lo tanto $T(g)^n = T(g^n) = 0$.

Además, como $t \in \text{rad}((T(M), T(M)))$ sabemos que existe un $m \in \mathbb{N}$ fijo (independiente de t) tal que $t^m = 0$. Tomemos entonces $p = mn$, probaremos que $f^p = (T(g) + t)^p = 0$. En los términos en los cuales t aparece m veces es claro que da cero, en caso contrario al ser mn términos aparecerá $T(g)$ n veces consecutivas y dará cero (recordar que $\text{rad}(T(M), T(M))$ es un ideal de $\text{End}_A(T(M))$). Probemos ahora (b). Como g es invertible sabemos que existe $g' \in \text{End}_B(M)$ tal que $gg' = 1$ y por lo tanto $T(gg') = T(g)T(g') = 1$. Entonces $f = T(g) + t$ admite inversa a izquierda si y solo si $fT(g') = 1 + tT(g')$ admite inversa a derecha y esto es cierto al estar t en $\text{rad}((T(M), T(M)))$, (esto se encuentra en el capítulo VII de [3]). Un razonamiento similar se utiliza para probar el mismo resultado a izquierda.

Para probar 2. sabemos que $T(M) \simeq T(N)$ lo que implica que existe un morfismo invertible $f = T(g) + t$ con $g : M \rightarrow N$ y $t \in \text{rad}(T(M), T(N))$, esto implica que $T(g)$ es invertible (basta calcular la inversa correspondiente). Al ser T fiel, refleja monomorfismos y epimorfismos lo que implica que g es invertible y $M \simeq N$.

Por último, para probar 3., supongamos por absurdo que $T(M)$ es indescomponible pero M no lo es, o sea $M = M_1 \oplus M_2$, con M_1 y M_2 no triviales, y consideremos las proyecciones p_1 y p_2 . Como $p_1 p_2 = 0$, $T(p_1)T(p_2) = 0$. Si $T(p_1)$ es invertible, entonces $T(p_2) = 0$ lo cual es absurdo ya que el funtor es fiel. El mismo razonamiento hacemos con $T(p_2)$ para concluir (recordemos que $T(M)$ es indescomponible) que $T(p_1)$ y $T(p_2)$ son nilpotentes. Además $p_1 + p_2 = 1$ y al tratarse de un funtor lineal $T(p_1) + T(p_2) = 1$ y esto no puede ser ya que la suma de dos nilpotentes no puede dar invertible en un anillo local. En conclusión el problema surge de suponer que M es descomponible y por lo tanto T refleja indescomponibles. \square

COROLARIO 4.6.3. *Sea $T : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}B$ un funtor lineal, fiel, casi pleno y que cumple $\dim(M) = \dim(T(M))$ para todo $M \in \text{mod}A$ entre dos categorías de módulos con A, B de dimensión finita. Entonces el tipo de representación de la segunda acota el tipo de representación de la primera. O sea, si B es mansa A deberá ser mansa o de tipo de representación finita (TRF) y si B es de TRF, A también lo es.*

Demostración: Podemos utilizar exactamente la misma demostración que en 4.5.6. \square

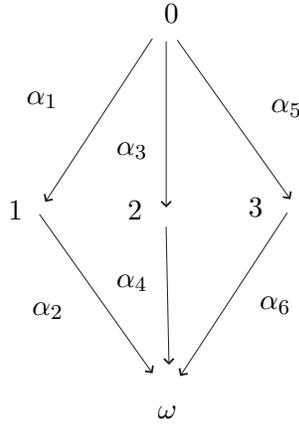
COROLARIO 4.6.4. *Si al corolario anterior le agregamos las hipótesis de T denso y refleja indescomponibles podemos asegurar que A y B tendrán el mismo tipo de representación.*

Demostración: Dado un módulo indescomponible N en $\text{mod} B$, $N \simeq T(M)$ para algún $M \in \text{mod}A$ indescomponible y único (ya que T lleva objetos distintos en objetos distintos). Por lo tanto hay una biyección entre los módulos indescomponibles de A y los de B lo que implica que tienen el mismo tipo de representación. \square

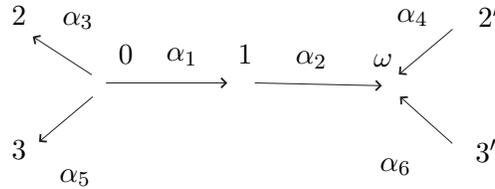
4.6.1. Producto de mansas

Sea A un álgebra Toupie con $D = 1$, $a = 1$ y $h = 2$. Entonces existe un funtor fiel, denso, casi pleno, que mantiene la dimensión entre $\prod_{i \in I} \text{mod}A_i \times \text{mod}\tilde{D}_n$ y $\text{mod}A$

EJEMPLO 4.6.5. *Consideremos $A = kQ/I$ con Q como en la siguiente figura:*



Sea $I = \langle \alpha_3\alpha_4, \alpha_5\alpha_6 \rangle$. Considere ahora kQ' con $Q' = \tilde{D}_6$ como en la siguiente figura:



Construiremos el funtor F de la siguiente manera, $F : \text{mod}\tilde{D}_6 \rightarrow \text{mod}A$. Considere $M = (M_i, M_{\alpha_i})$ $i = 0, 1, 2, 2', 3, 3', \omega$ una representación de \tilde{D}_6 , definimos $F(M) = N$ siendo $N_i = M_i$ para $i = 0, 1, \omega$ y $N_i = M_i \oplus M_{i'}$ para $i = 2, 3$. Con respecto a las flechas $N_{\alpha_i} = M_{\alpha_i}$ para $i = 1, 2$, $N_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} M_{\alpha_i} \\ 0 \end{pmatrix}$ para $i = 3, 5$ y $N_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 0 & M_{\alpha_i} \end{pmatrix}$ para $i = 4, 6$. Ahora, dado un mapa $f : M \rightarrow M'$ entre representaciones de \tilde{D}_6 definimos $g(i) = f(i)$ para $i = 0, 1, \omega$ y $g(i) = \begin{pmatrix} f_i & 0 \\ 0 & f_{i'} \end{pmatrix}$ para $i = 2, 3$. Es sencillo verificar que F es fiel y que mantiene la dimensión. Veamos que F es casi pleno. Para esto debemos observar que dado un mapa $h : F(M) \rightarrow F(M')$ h_2 y h_3 tendrán la siguiente forma: $\begin{pmatrix} h(i)_1 & h(i)_2 \\ 0 & h(i)_3 \end{pmatrix}$ para $i = 2, 3$ y esta es la forma buscada (en el resto de los puntos ni aparecerá la parte del radical). Veamos de F es denso. Dada N una representación de A tenemos que $N_2 = \text{Im}(N_{\alpha_3}) \oplus L$ y $N_3 = \text{Im}(N_{\alpha_5}) \oplus L'$ definimos entonces $M_i = N_i$ para $i = 0, 1, \omega$, $M_{2'} = \text{Im}(N_{\alpha_3})$, $M_2 = L$, $M_{3'} = \text{Im}(N_{\alpha_5})$ y $M_3 = L'$. Luego definimos $M_{\alpha_i} = N_{\alpha_i}$

para $i = 1, 2$, M_{α_3} y M_{α_5} son los mapas N_{α_3} y N_{α_5} respectivamente pero restringiendo el codominio a $Im(N_{\alpha_3})$ e $Im(N_{\alpha_5})$ mientras que M_{α_4} y M_{α_6} son las restricciones de N_{α_4} y N_{α_6} a L y L' .

EJEMPLO 4.6.6.

4.6.2. $D = 0$

Dada un álgebra Toupie A con $D = 0$ podemos construir un functor entre las categorías $modA$ y $\mathcal{C} = modA_0 \times modA_\omega$. Por las propiedades del functor podremos deducir que A es de tipo de representación finita si y solamente si A_0 y A_ω lo son, que A es de tipo de representación infinita mansa si A_0 o A_ω lo son y ninguna es salvaje y A es salvaje si A_0 o A_ω lo son.

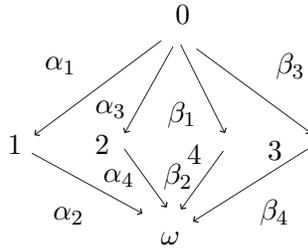
Veamos como se construye:

Construiremos un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow modA$. Dado (M, N) un objeto en \mathcal{C} con $M \in modA_0$ y $N \in modA_\omega$, $R = F(M, N)$ es una representación tal que $R(0) = N(0)$, $R(\omega) = N(\omega)$, $R_i = M_i \oplus N_i$ para todo $i \in Q_0 - \{0, \omega\}$ y $R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \\ & N_\alpha \end{pmatrix}$ si $s(\alpha) = 0$, $R_\alpha = \begin{pmatrix} M_\alpha & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$ si $t(\alpha) = \omega$ y $R_\alpha = \begin{pmatrix} M_\alpha & 0 \\ 0 & N_\alpha \end{pmatrix}$ en cualquier otro caso. Además dado un mapa $f : (M, N) \rightarrow (M', N')$ podemos verlo como los mapas $f_1 : M \rightarrow M'$ y $f_2 : N \rightarrow N'$ definimos $g = F(f) : R \rightarrow R'$ como $g(0) = f_2(0)$, $g(\omega) = f_1(\omega)$ y $g(i) = \begin{pmatrix} f_1(i) & 0 \\ 0 & f_2(i) \end{pmatrix}$ para $i \in Q_0 - \{0, \omega\}$. Es claro que el functor es fiel y mantiene las dimensiones. Al igual que en la subsección anterior dado un mapa $g : F(M, N) \rightarrow F(M', N')$ podemos ver que $g(i)$ tiene esta forma: $g(i) = \begin{pmatrix} f_1(i) & f_3(i) \\ 0 & f_2(i) \end{pmatrix}$ entre $R(i)$ y $R'(i)$ y es casi pleno. Para probar que es denso tomemos una representación R en A y definimos $M \in modA_\omega$ como $M(0) = R(0)$ $M(i) = Im(R_{\alpha_i} \cdots R_{\alpha_1})$ $\forall i \in Q_0 - \{0, \omega\}$ siendo $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ un camino de 0 a i y definimos $N \in modA_0$ como $N(i) = \frac{R(i)}{Im(R_{\alpha_i} \cdots R_{\alpha_1})}$ $\forall i \in Q_0 - \{0\}$ siendo $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ un camino de 0 a i .

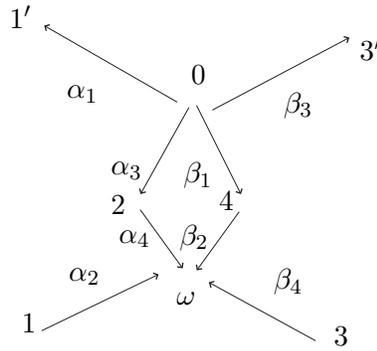
4.6.3. Un caso particular

En esta parte clasificaremos un caso particular de álgebra Toupie: $D = 1$, $B = 4$, $b = 2$, $h = 2$ y una relación de conmutatividad con dos ramas de largo dos. Primero utilizaremos la misma técnica que en los casos anteriores de esta sección y luego aplicaremos un resultado conocido de clasificación de álgebras mansas con una relación que aparece en la página 164 (caso 72) de [12].

Consideremos el álgebra $A = kQ/I$ a clasificar con Q :



e $I = \langle \alpha_1\alpha_2, \alpha_3\alpha_4 - \beta_1\beta_2, \beta_3\beta_4 \rangle$ y $B = kQ'/I'$ siendo Q' :

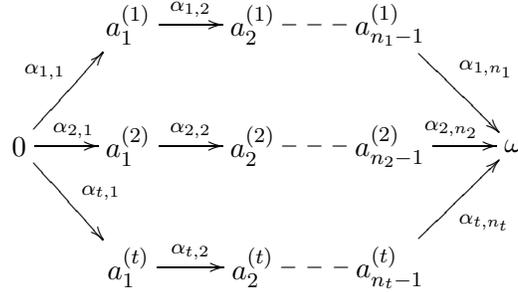


e $I' = \langle \alpha_3\alpha_4 - \beta_1\beta_2 \rangle$. Construiremos ahora un funtor $F : \text{mod}B \rightarrow \text{mod}A$ de la siguiente forma: Dada $M = (M_i, M_\alpha) \in \text{mod}B$ definimos $F(M) = N$ tal que $N_i = M_i$ para $i = 0, 2, 4, \omega$ y $N_1 = M_1 \oplus M_{1'}$ y $N_3 = M_3 \oplus M_{3'}$ para los espacios vectoriales y $N_\alpha = M_\alpha$ para $\alpha = \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2$, $N_\alpha = \begin{pmatrix} M_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ para $\alpha = \alpha_1, \beta_3$ y $N_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & M_\alpha \end{pmatrix}$ para $\alpha = \alpha_2, \beta_4$ en las transformaciones lineales. Dado un morfismo de representaciones $f : M \rightarrow M'$ en $\text{mod}B$ definimos $F(f) : F(M) \rightarrow F(M')$ de la siguiente forma: $F(f)_i = f_i$ para $i = 0, 2, 4, \omega$, $F(f)_i = \begin{pmatrix} f_i & 0 \\ 0 & f_{i'} \end{pmatrix}$ para $i = 1, 3$. Este funtor es fiel, conserva dimensiones, es denso y casi pleno por lo tanto el tipo de representación de $\text{mod}A$ y $\text{mod}B$ coinciden. Por último, aplicando el resultado que enumera una a una las álgebras mansas con una relación (que no sean relaciones cero escindidas) en la página 164 (caso 72) de [12] encontramos que B es mansa y por lo tanto A es mansa.

4.7. Dependencia de A_0 y A_ω

A continuación veremos dos resultados que ayudan a clasificar el tipo de representación que tienen ciertas clases de álgebras Toupie. Se probará que en estos casos particulares solo existe un número finito de representaciones indescomponibles (a menos de isomorfismos) que contienen al conjunto $\{0, \omega\}$ en su soporte.

LEMA 4.7.1. *Consideremos $A = kQ/I$ con Q :*



$e I = \langle \alpha^1 - \lambda_j \alpha^j \rangle$ con $j = 2, \dots, t$ siendo $\alpha^j = \alpha_{j,1} \cdots \alpha_{j,n_j}$. Entonces A tiene un único módulo indescomponible N tal que $\{0, \omega\} \in \text{sop}(N)$.

Demostración: Tomemos una representación indescomponible M cualquiera con $\{0, \omega\}$ en su soporte. Observemos que $M_{\alpha_{i,n_i}} \cdots M_{\alpha_{i,1}}$ es invertible. Primero veamos que $M_{\alpha_{i,n_i}} \cdots M_{\alpha_{i,1}}$ es sobreyectiva. Para probar esto observemos primero que: $\text{Im}(M_{\alpha_{i,1}} \cdots M_{\alpha_{i,n_i}}) = \text{Im}(M_{\alpha_{j,1}} \cdots M_{\alpha_{j,n_j}})$, esto sale directamente de la definición de A . Vamos a probar que podemos construir dos subrepresentaciones R, K tales que su suma (\oplus) da todo M y concluiremos que alguna de ellas será trivial al ser M indescomponible.

Tomemos R , con $R(0) = M(0)$, $R(i, j) = \text{Im}(M_{\alpha_{i,j}} \cdots M_{\alpha_{i,1}})$ y $R(\omega) = \text{Im}(M_{\alpha_{i,n_i}} \cdots M_{\alpha_{i,1}})$; con respecto a los mapas consideraremos simplemente las restricciones de los $M_{\alpha_{i,j}}$ a R .

Tomemos K , con $K(0) = 0$, $K(i, j) = M(i, j)/R(i, j)$ y $K(\omega) = M(\omega)/R(\omega)$; para definir los mapas en K observemos que $R(i, j) \subset \ker(\pi \circ M_{\alpha_{i,j+1}})$ siendo $\pi : M(i, j+1) \rightarrow K(i, j+1)$ la proyección canónica y por lo tanto consideramos el mapa $K_{\alpha_{i,j+1}} = \pi M_{\alpha_{i,j+1}} \pi^{-1}$ que está bien definido. Claramente, la suma es directa y como $M(0) \neq 0$ concluimos que $M = R$ y $M_{\alpha_{i,n_i}} \cdots M_{\alpha_{i,1}}$ es sobreyectiva.

Veamos ahora que $M_{\alpha_{i,n_i}} \cdots M_{\alpha_{i,1}}$ es inyectiva. La técnica para probarlo será similar a la anterior considerando dos subrepresentaciones L y L' tales que su suma (\oplus) da M y concluyendo que

alguna deberá ser trivial. Tomemos L , con $L(0) = \text{Ker}(M_{\alpha_i, n_i} \cdots M_{\alpha_i, 1})$, $L(i, j) = \text{Ker}(M_{\alpha_i, n_i} \cdots M_{\alpha_i, j+1})$ y $L(\omega) = 0$; con respecto a los mapas consideraremos simplemente las restricciones de los $M_{\alpha_i, j}$ a L .

Tomemos ahora L' con $L'(0) = M(0)/L(0)$, $L'(i, j) = M(i, j)/L(i, j)$ y $L'(\omega) = M(\omega)$; con respecto a los mapas de L' observemos que $L(i, j) \subset \text{Ker}(\pi \circ M_{\alpha_i, j+1})$ siendo $\pi : M(i, j+1) \rightarrow L'(i, j+1)$ la proyección canónica y por lo tanto consideramos el mapa $L'_{\alpha_i, j+1} = \pi M_{\alpha_i, j+1} \pi^{-1}$ que está bien definido. Por lo tanto Como $L \oplus L' = M$ alguna de las dos deberá ser trivial, como $M(\omega) \neq 0$ concluimos que $L' = M$ y $M_{\alpha_i, n_i} \cdots M_{\alpha_i, 1}$ es inyectiva.

En definitiva, probamos que $h = M_{\alpha_i, n_i} \cdots M_{\alpha_i, 1}$ es biyectiva.

Probemos ahora que M es isomorfa a N con $N(0) = k$, $N(\omega) = k$ y $N(i, j) = k$ con los mapas $N_{\alpha_i, 1} = \lambda_i$ si $i \neq 1$ y el resto de los mapas identidad.

Para esto consideraremos dos morfismos de representaciones $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow M$ tales que $f \circ g = \text{Id}_N$ por lo tanto g es una sección y al ser M indescomponible $M \simeq N$.

Podemos considerar $f(\omega)$ la proyección de la primer coordenada de $M(\omega)$ en $N(\omega)$ y $g(\omega)$ la inclusión de $N(\omega)$ en la primer coordenada de $M(\omega)$. Definimos $f(i, j) : M(i, j) \rightarrow N(i, j)$ como $f(\omega) \circ M_{\alpha_i, j+1} \cdots M_{\alpha_i, n_i}$ y $f(0) = f(\omega) \circ h = f(\omega) \circ M_{\alpha_i, n_i} \cdots M_{\alpha_i, 1}$. Ahora definimos $g(0) = h^{-1} \circ i$ y $g(i, j) = (M_{\alpha_i, 1} \cdots M_{\alpha_i, j} \circ g(0) \circ \lambda_i^{-1})$. Es fácil ver que $f \circ g = \text{Id}_N$ y por lo tanto $M \simeq N$.

DEFINICIÓN 4.7.2. Sea A un álgebra Toupie tal que $\dim_k e_o A e_\omega = 1$ y α^1 es una única rama en I .

Sean x e y vértices en α^1 . Si existe un camino de x a y en α^1 , entonces definimos D_{xy} el módulo tal que $D_{xy}(a) = 0$ si a está en el camino de x a y y $D_{xy}(a) = k$ en caso contrario. Para los mapas definimos $D_{xy}(\alpha)$ como la identidad siempre que sea posible y sino como 0.

Si existe un camino de y a x definimos $D_{xy}(a)$ como k^2 si a pertenece al camino de y a x y k en caso contrario. Para los mapas definimos $D_{xy}(\alpha)$ como la inclusión en la primer coordenada si $t(\alpha) = y$, la proyección en la segunda coordenada si $s(\alpha) = x$ y la identidad en el resto de los casos.

El siguiente resultado se encuentra en el trabajo: "Toupie algebra, some examples of laura algebras" de [4].

PROPOSICIÓN 4.7.3. Sea A un álgebra toupie tal que $m = \dim_K e_o A e_\omega = 1$ y α^1 es una única rama en I . Sea M un A -módulo indescomponible. Si $\{0, \omega\} \in \text{sop}(M)$ entonces $M \simeq D_{xy}$ para algún x e y en $\text{sop}(M)$.

Demostración: En primer lugar, observemos que podemos elegir una presentación de $A = kQ/I$ tal que $\alpha^i - \alpha^j \in I$ para todo $i, j \neq 1$. Se puede ver que no podemos tener más de dos simples en $\text{top}(M)$. Sean 0 y y los vértices correspondientes con los módulos simples en $\text{top}(M)$ (podría ser $0 = y$) y x y ω los vértices correspondientes con los módulos simples en $\text{soc}(M)$ (podría ser $x = \omega$).

Consideremos $e_p = \sum_{i \in \alpha^1} e_i$ y $e = 1 - e_p + e_0 + e_\omega$. El módulo $N = eMe$ también es indescomponible y se construye un isomorfismo entre N y $D_{0\omega}$ (el isomorfismo es análogo al del resultado anterior). Más aún, $e_p M e_p$ es una suma directa de dos módulos y se puede construir un isomorfismo entre $e_p M e_p$ y $e_p D_{xy} e_p$. Usando estos dos isomorfismos obtenemos el morfismo buscado. \square

4.8. Esquema

A continuación veremos el teorema de clasificación de las álgebras Toupie.

Observemos que dada un álgebra Toupie A , las categorías $\text{mod}A_0$ y $\text{mod}A_\omega$ son fácilmente clasificables al tratarse de álgebras hereditarias sin ciclos o, a lo sumo, con algunas relaciones monomiales. Por lo tanto, afirmar que la clasificación de un álgebra Toupie depende de la clasificación de A_0 y A_ω es resolver la misma.

Recordemos, antes de comenzar con el teorema, los parámetros asociados a un álgebra Toupie:

$$D = \dim_K e_\omega A e_0$$

Si b_1, \dots, b_B son las ramas:

1. b_1, \dots, b_b son las ramas que contienen relaciones no monomiales.
2. b_{b+1}, \dots, b_{b+h} son las ramas que contienen relaciones monomiales con la primera relación comenzando en 0 y de largo 2 y la última relación terminando en ω y de largo 2 .
3. $b_{b+h+1}, \dots, b_{b+h+o}$ son las ramas con relaciones monomiales que no cumplen alguna de las condiciones de 2 .
4. $b_{b+h+o+1}, \dots, b_{b+m+f+o+a=B}$ son las ramas sin relaciones.

Recordemos también, que en el caso de las álgebras supercanónicas, llamaremos t a la cantidad de posets a partir de los cuales definimos el álgebra supercanónica.

TEOREMA 4.8.1. *Considere A un álgebra Toupie de la forma $A = kQ/I$. Entonces:*

Si $C = \text{mod}A_0 \times \text{mod}A_\omega$ es de tipo de representación finita entonces A es de tipo de representación finita si:

1. $D = 1$ y se satisface alguna de las siguientes condiciones

- a) $1 \leq B \leq 2$
- b) $B = 3$ y $a = 0$
- c) $B = 4$, $a = 0$ y $3 \leq b \leq 4$.

2. $D = 0$.

Si $C = \text{mod}A_0 \times \text{mod}A_\omega$ es de tipo de representación infinita mansa entonces A es de tipo de representación infinita mansa si:

1. $D = 2$, $h + o = 0$ y se satisface alguna de las siguientes condiciones

- a) $A = \mathcal{S}(S_1, S_2)$ es supercanónica con S_1 y S_2 vacíos, lineales o dos puntos no ordenados
- b) A es canónica con $g_\chi \leq 1$
- c) $A = \mathcal{S}(S_1, S_2, S_3; \lambda_3)$ es supercanónica con S_1 dos puntos no ordenados, y S_2, S_3 puntos aislados.

2. $D = 1$ y se satisface alguna de las siguientes condiciones

- a) $B = 3$ con $a = 0$ o $a \neq 0$ y $h = 2$.
- b) $B = 4$ y $a = 0$
 - 1) $3 \leq b \leq 4$
 - 2) $b = 2$, $h = 2$ y ninguna rama de la relación de conmutatividad es de largo mayor que dos.

3. $D = 0$

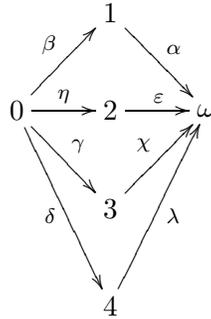
En cualquier otro caso A es salvaje.

Demostración:

1. Si $D > 2$ o $B > 4$ el álgebra es de tipo de representación infinita salvaje ya que podemos construir con la técnica de inmersión un funtor lineal, fiel y pleno que conserva las dimensiones entre un álgebra hereditaria salvaje y éstas utilizando el teorema 4.5.6.
2. Si $D = 2$ es de tipo de representación infinita ya que podemos construir un funtor lineal, fiel y pleno que conserva las dimensiones entre un álgebra hereditaria mansa y éstas. Podemos encontrar esta técnica en el ejemplo 4.5.9. Veamos ahora en cada caso si es mansa o salvaje:
 - a) $h + o \geq 1$ es salvaje (técnica de inmersión)
 - b) $h + o = 0$ es supercanónica.

Si $t > 2$ (recordemos que t es la cantidad de posets del álgebra supercanónica) sabemos, por el teorema 4.4.8, que A es mansa si y solo si $A/(0)$ lo es. Por el lema 4.4.7 sabemos que si $A/(0)$ es mansa necesariamente los posets son lineales o dos puntos no ordenados (observemos que ningún poset puede ser vacío ya que el ideal no sería admisible).

Si todos son lineales se trata de un álgebra canónica y utilizamos el teorema 4.1.16 y la observación 4.1.17. Si alguno de los posets es dos puntos no ordenados (si hay más de un poset de dos puntos no ordenados ya tenemos $B > 4$), utilizando el teorema 4.4.8 el único caso manso es:



con $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3\}$ y $S_3 = \{4\}$.

Si $t = 2$ A será mansa si y solamente si S_1 y S_2 son vacíos, lineales o dos puntos no ordenados. Para probar que en estos casos el álgebra es mansa utilizamos el teorema 4.4.8 y el ejemplo 4.4.5. Para probar que de lo contrario es salvaje utilizamos la cobertura universal como en el ejemplo 4.4.6.

3. Si $D = 1$

a) Si $B = 1$ o $B = 2$ es tipo de representación finita ya que es de tipo A_n o \tilde{A}_n con relaciones: Si las relaciones son monomiales utilizamos el resultado visto sobre cobertura universal en el teorema 4.3.9 como en el ejemplo 4.3.10. Si la relación es de conmutatividad, su clasificación queda determinada por A_0 y A_ω utilizando el lema 4.7.3 y por lo tanto es de tipo de representación finita.

b) Si $B = 3$

1) Si $a = 0$ queda determinado por A_0 y A_ω utilizando los lemas 4.7.1 y 4.7.3 según corresponda

2) Si $a \neq 0$

a') $h = 2$ el álgebra es mansa ya que podemos construir un funtor lineal, fiel y pleno entre los módulos del álgebra

y un producto de categorías de módulos mansas como vimos en el ejemplo 4.6.5.

b') sino salvaje (técnica de inmersión).

c) Si $B = 4$

1) Si $a \neq 0$ es salvaje (técnica de inmersión)

2) Si $a = 0$

a') $b = 3$ o $b = 4$ queda clasificado por A_0 y A_ω utilizando los teoremas 4.7.1 y 4.7.3 según corresponda.

b') $b = 2$, $h = 2$ y ninguna rama de la relación de conmutatividad es mayor que dos es mansa (ver subsección 4.6.3), sino salvaje (técnica de inmersión).

4. Si $D = 0$ la clasificación queda determinada por A_0 y A_ω como vimos en la subsección 4.6.2 ($D = 0$).

Apéndice A

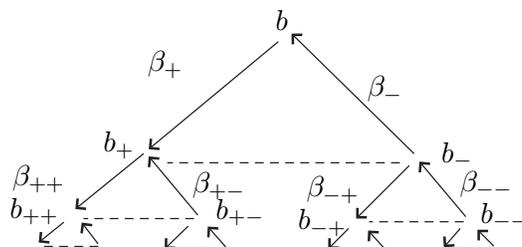
Álgebras Tubulares

DEFINICIÓN A.0.2. (tipo tubular de kQ con \bar{Q} Euclideo) Sea kQ el álgebra de caminos de un carcaj cuyo grafo subyacente es un diagrama Euclideo. Definimos el tipo tubular de kQ de la siguiente manera: Si $\bar{Q} = \widetilde{D}_n$ ($n \geq 4$) el tipo tubular es $(n - 2, 2, 2)$, para $\bar{Q} = \widetilde{E}_m$ el tipo tubular es $(m - 3, 3, 2)$ y para $\bar{Q} = \widetilde{A}_n$ el tipo tubular es (p, q) donde p es la cantidad de flechas de $i \rightarrow i + 1$ y q son la cantidad de flechas en el sentido opuesto ($p + q = n$).

DEFINICIÓN A.0.3. (tipo tubular de álgebra mansa concealed) Dada una álgebra mansa concealed B sabemos que existe un módulo inclinante postproyectivo en A , T_A , con $A = kQ$ con \bar{Q} euclideo y $B = \text{End}_A(T_A)$. Entonces definimos el tipo tubular de B como el tipo tubular de A .

OBSERVACIÓN A.0.4. El rango del grupo de Grothendieck del álgebra hereditaria concealed de tipo tubular $(n_1, n_2 \cdots n_r)$ es $2 + \sum_{i=1}^r (n_i - 1)$.

DEFINICIÓN A.0.5. (Ramas) El siguiente carcaj con relaciones es llamado una rama completa en b :



Sus vértices son de la forma b_{i_1, i_2, \dots, i_n} indexados por todas las posibles secuencias i_1, i_2, \dots, i_n , con $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{+, -\}$. Sus flechas son las si-

güentes:

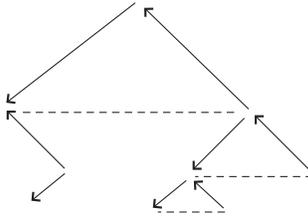
$$\beta_{i_1, \dots, i_n-} : b_{i_1, \dots, i_n-} \rightarrow b_{i_1, \dots, i_n}$$

y

$$\beta_{i_1, \dots, i_n+} : b_{i_1, \dots, i_n} \rightarrow b_{i_1, \dots, i_n+}$$

Sus relaciones son $\beta_{i_1, \dots, i_n-} \beta_{i_1, \dots, i_n+}$, para toda secuencia i_1, \dots, i_n . Un subcarcaj pleno, finito y conexo Δ con las relaciones inducidas, que contiene al vértice b y tiene n vértices se llama una **rama en b de largo n** . Al subcarcaj vacío lo llamamos rama de largo 0.

EJEMPLO A.0.6. La siguiente figura nos muestra una rama en b de largo 9.

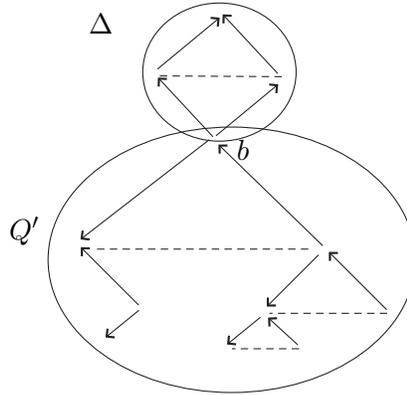


DEFINICIÓN A.0.7. (Agregar una rama) Dada un álgebra C con carcaj Q y relaciones σ_i , y un vértice b de Q , la restricción B de C a algún subcarcaj pleno Q' de Q será llamada una rama de C de largo n si:

1. B es una rama en b de largo n ;
2. Existe un subcarcaj pleno Δ tal que $Q = Q' \cup \Delta$, $\Delta \cap Q' = \{b\}$ y además toda relación σ_i tiene su soporte en Δ o en Q' .

Si llamamos ρ_i a las relaciones σ_i con soporte en Δ y sea $A = A(\Delta, \{\rho_i\})$, entonces decimos que C se obtiene de A **agregando la rama B** en b .

EJEMPLO A.0.8. Consideremos el siguiente carcaj con relaciones (Q, \mathcal{I}) y $C = kQ/I$:



Si llamamos \mathcal{I}' al ideal generado por la relación de conmutatividad con $A = k\Delta/\mathcal{I}'$ e \mathcal{I}'' al ideal generado por el resto de las relaciones con $B = kQ'/\mathcal{I}''$ obtenemos que C se obtiene de A agregándole la rama B .

DEFINICIÓN A.0.9. (Extensión tubular) Sea A_0 un álgebra, E_1, E_2, \dots, E_t A_0 -módulos, y K_1, \dots, K_t ramas (en gral. no vacías). Sea $A_0[E_i, K_i]_{i=1}^t$ definido inductivamente: $A_0[E_1, K_1]$ se obtiene de la extensión por un punto $A_0[E_1]$ con vértice de extensión w_0 (el nuevo vértice) agregándole la rama K_1 . De forma inductiva $A_0[E_i, K_i]_{i=1}^k = (A_0[E_i, K_i]_{i=1}^{k-1})[E_k, K_k]$. Dada una familia de tubos estables \mathcal{T} decimos que $A = A_0[E_i, K_i]_{i=1}^t$ es una **extensión tubular de A_0 usando módulos de \mathcal{T}** si E_1, E_2, \dots, E_t son módulos en la boca de los tubos (ortogonales) de \mathcal{T} (En algunos casos podrá ser conveniente considerar ramas vacías K_i allí $A_0[E, K_i] = A_0$).

OBSERVACIÓN A.0.10. (Extensión tubular de un álgebra concealed mansa) Sea A_0 un álgebra mansa concealed. Existe una única componente \mathcal{T} de tubos estables separante (la componente regular) y por lo tanto no debemos especificar \mathcal{T} .

DEFINICIÓN A.0.11. (tipo de la extensión tubular) Sea $A = A_0[E_i, K_i]_{i=1}^t$ una extensión tubular de A_0 , usando módulos E_i de una I -flia estable \mathcal{T} , con tubos $T(\rho)$ con $\rho \in I$. Sea r_ρ el rango de $T(\rho)$. El tipo de extensión de A en A_0 se dará por la función inyectiva $n : I \rightarrow \mathbb{N}$, con

$$n_\rho = r_\rho + \sum_{E_i \in T(\rho)} |K_i|.$$

En general consideramos un conjunto $I' \subset I$ con $n_\rho = 1$ con $\rho \in I \setminus I'$.

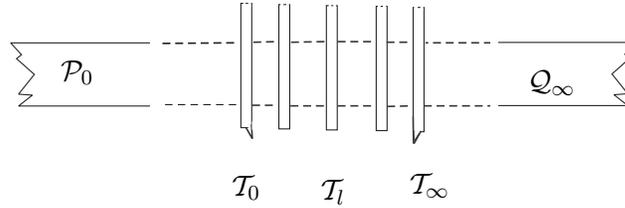
OBSERVACIÓN A.0.12. El rango del grupo de Grothendieck de la extensión tubular es $2 + \sum_{i=1}^t (n_i - 1)$.

DEFINICIÓN A.0.13. (Álgebra tubular) Llamaremos álgebra tubular a una extensión tubular de tipo $(2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 2)$ o $(6, 3, 2)$ de un álgebra concealed mansa.

Describamos la estructura del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra tubular.

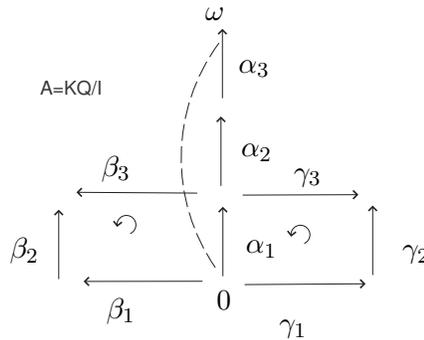
TEOREMA A.0.14. *Sea A un álgebra tubular de tipo (n_1, n_2, \dots, n_t) . Entonces $A\text{-mod}$ tiene las siguientes componentes:*

Primero una componente postproyectiva \mathcal{P}_0 , luego por cada $\gamma \in Q^+ \cup \{\infty, 0\}$, una familia tubular separante T_γ , T_γ estable de tipo (n_1, n_2, \dots, n_t) salvo T_0 y T_∞ y finalmente una componente preinjectiva \mathcal{Q}_∞ . Podemos visualizar esta situación con el siguiente esquema:

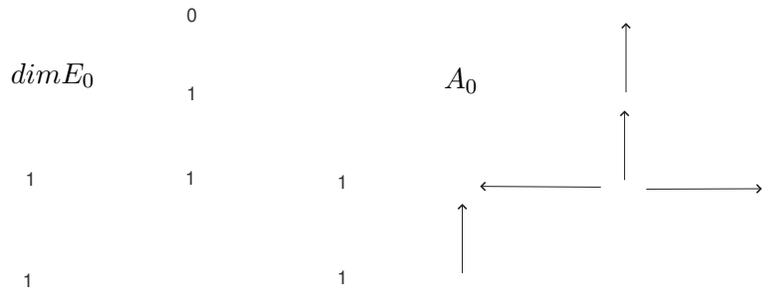


con mapas no nulos solo de izquierda a derecha: dados X, Y indescomponibles, con $\text{Hom}(X, Y) \neq 0$, entonces o pertenecen a la misma componente, o $X \in \mathcal{P}_0$, Y no pertenece a \mathcal{P}_0 , o X no pertenece a \mathcal{Q}_∞ e $Y \in \mathcal{Q}_\infty$, o $x \in T_\gamma$, $Y \in T_\delta$ con $\gamma < \delta$. En particular se cumple que las álgebras tubulares son mansas.

EJEMPLO A.0.15. *Consideremos el álgebra $A = kQ/I$ dado por el carcaj Q y el ideal admisible \mathcal{I} :*



siendo $\mathcal{I} = \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \alpha_1 \beta_3 - \beta_1 \beta_2, \alpha_1 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2 \rangle$ observemos que A es la extensión por un punto $A_0[(E_0)]$ siendo A_0 y E_0 los siguientes:



Vemos que A_0 es un álgebra mansa hereditaria de tipo $(3, 3, 2)$ y E_0 pertenece a la boca del tubo de rango 2. Por lo tanto se trata de una extensión tubular de tipo $(3, 3, 3)$ lo que implica que el álgebra A es tubular. En particular la cantidad de vértices está dada por $2 - t + \sum_{i=1}^t n_i = 2 - 3 + 9 = 8$.

Apéndice B

Carcaj de Auslander-Reiten

DEFINICIÓN B.0.16. *Un sucesión exacta corta entre A -módulos:*

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

*es una **sucesión de Auslander-Reiten** si:*

1. *La sucesión no escinde.*
2. *M y N son módulos indescomponibles.*
3. *Dado $h : X \rightarrow M$ morfismo de A -módulos que no sea un epimorfismo que escinde, existe $k : X \rightarrow E$ tal que $gk = h$*
4. *Dado $h : N \rightarrow X$ morfismo de A -módulos que no sea un monomorfismo que escinde, existe $k : E \rightarrow X$ tal que $kf = h$.*

OBSERVACIÓN B.0.17. *Para tener una sucesión de Auslander-Reiten no es necesario pedir 3 y 4, alcanza con pedir una de las dos.*

TEOREMA B.0.18. *Sea $M \in \text{mod}A$ indescomponible. Entonces:*

1. *Si M no es proyectivo, existe y es única la sucesión de Auslander-Reiten que termina en M :*

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0.$$

Al módulo N se le llama el trasladado de Auslander-Reiten de M y se denota τM .

2. *Si M no es inyectivo, existe y es única la sucesión de Auslander-Reiten que empieza en M :*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} D \rightarrow 0.$$

Al módulo D se le llama el trasladado inverso de Auslander-Reiten de M y se denota $\tau^{-1}M$.

DEFINICIÓN B.0.19. Decimos que $f : X \rightarrow Y$, un morfismo de A -módulos, es **irreducible** si para toda descomposición de la forma $f = gh$, se tiene que g es un epimorfismo que escinde o h es un monomorfismo que escinde.

DEFINICIÓN B.0.20. A partir de una k -álgebra A , podemos construir el **carcaj de Auslander-Reiten**, que se denota Γ_A y se construye de la siguiente manera:

1. Hay un punto en Γ_A por cada clase de isomorfismos de A -módulos indescomponibles.
2. Hay una flecha $[M] \rightarrow [N]$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $f : M \rightarrow N$.

DEFINICIÓN B.0.21. Sea A una k -álgebra y $\Gamma(\text{mod } A)$ el carcaj de Auslander-Reiten de A . La componente conexa \mathcal{P} de $\Gamma(\text{mod } A)$ se llama **componente postproyectiva** si \mathcal{P} es acíclico y, para cualquier módulo indescomponible en \mathcal{P} , existe $t \geq 0$ y $a \in (Q_A)_0$ tal que $M \simeq \tau^{-t}P(a)$.

Bibliografía

- [1] Dalia Artenstein, *Clasificación de Álgebras Hereditarias*, Facultad de Ciencias, UdelaR, (2007).
- [2] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, (2006).
- [3] Ibrahim Assem, *Algèbres et modules*, Masson, Les presses de l'Université d'Ottawa, (1997).
- [4] D. Castonguay, J. Dionne, F. Huard, M. Lanzilotta; *Toupie algebras, some examples of laura algebras*, arXiv:1011.5136v1, sometido 2010.
- [5] María Andrea Gatica, Marcelo Lanzilotta, *Hochschild cohomology of a generalisation of canonical algebras*, Proceedings of ICRA XIII (International Conference of Representations of Algebras), São Paulo Journal of Mathematical Sciences, 4, (2), 93-111, (2010).
- [6] Helmut Lenzing, José Antonio de la Peña, *Supercanonical Algebras*, Journal of algebra Volumen 282 (298-348), (2004).
- [7] Helmut Lenzing, José Antonio de la Peña, *Wild canonical Algebras*, Mathematische Zeitschrift Volumen 224, Number 3 (403-425), (1995).
- [8] J.A de la Peña, S.Kasjan *Constructing the preprojective Components of an Algebra*, Journal of Algebra 179, (1996).
- [9] Klaus Bongartz, *Algebras and Quadratic Forms*, J.London Math. Soc.(2), 28, 461-469, (1983).
- [10] J.A de la Peña, *La cubierta universal de un carcaj con relaciones*, Tesis de maestría, U.N.A.M. (1982).
- [11] Claus Michael Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics 1099, (1984).
- [12] Claus Michael Ringel, *The tame one-relation Algebras*, Representation Theory I, Lecture Notes in Mathematics 831, (1980).

- [13] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, New York, (2009).